Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=7$ și $a_3=15$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$. Determinaţi numerele naturale n, pentru care $f(n)<8$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-1}=x+1$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: y=\frac{x}{2}+2$ și $d_2: y=(m-3)x+1$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.

5p **6**. Arătaţi că, dacă $\sin 2x=\frac{1}{2}$, atunci $(\sin x+\cos x)^2=\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(X(3,1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $X(a,b)X(c,d)=X(ac+9bd, ad+bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $\det(X(m,n))=1$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^3-4X^2-7X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=9$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\sqrt{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt[n]{e}\leq\frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

2. Se consideră funcția $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x+2)}{x+2}\cdot\sqrt{e^x}$ este egal cu π.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{7+15}{2}=$	**3p**
	$=11$	**2p**
2.	$3n+2<8 \Leftrightarrow n<2$	**2p**
	Cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$	**3p**
3.	$x^2-1=(x+1)^2 \Rightarrow 2x+2=0$	**3p**
	$x=-1$, care convine	**2p**
4.	$C_5^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=$	**3p**
	$=10$	**2p**
5.	$m_{d_1}=\frac{1}{2}$, $m_{d_2}=m-3$	**2p**
	d_1 și d_2 sunt perpendiculare $\Leftrightarrow m_{d_1}\cdot m_{d_2}=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m-3)=-1 \Leftrightarrow m=1$	**3p**
6.	$\sin 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow (\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x=$	**3p**
	$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(3,1)=\begin{pmatrix}3&1\\9&3\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(X(3,1)\right)=\begin{vmatrix}3&1\\9&3\end{vmatrix}=3\cdot 3-9\cdot 1=$	**3p**
	$=9-9=0$	**2p**
b)	$X(a,b)X(c,d)=\begin{pmatrix}a&b\\9b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&d\\9d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+9bd&ad+bc\\9bc+9ad&9bd+ac\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}ac+9bd&ad+bc\\9(ad+bc)&ac+9bd\end{pmatrix}=X(ac+9bd,ad+bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d	**2p**
c)	$\det\left(X(m,n)\right)=m^2-9n^2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, $(m-3n)(m+3n)=1 \Rightarrow m-3n=m+3n=-1$ sau $m-3n=m+3n=1$ și obținem $(-1,0)$ sau $(1,0)$	**3p**
2.a)	$f=2X^3-4X^2-7X+9 \Rightarrow f(1)=2\cdot 1^3-4\cdot 1^2-7\cdot 1+9=$	**2p**
	$=2-4-7+9=0$	**3p**
b)	$f\left(-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)-4\cdot 2-7\cdot\left(-\sqrt{2}\right)+m=0$	**3p**
	$m=8-3\sqrt{2}$	**2p**

c)	$x_1+x_2=1$ și $x_1+x_2+x_3=2\Rightarrow x_3=1$	**3p**
	$f(1)=0\Rightarrow m=9$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=(x-1)'e^x+(x-1)\left(e^x\right)'=$	**2p**
	$=e^x+(x-1)e^x=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-1}{e^{-x}}+1\right)=1$, deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$ și, cum $f(0)=0$, obținem $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$	**3p**
	$f\left(\dfrac{1}{n}\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, deci $\left(\dfrac{1}{n}-1\right)e^{\frac{1}{n}}+1\geq 0\Rightarrow\sqrt[n]{e}\leq\dfrac{n}{n-1}$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx=\int_2^3 x(x-2)\,dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right\|_2^3=$	**3p**
	$=9-9-\dfrac{8}{3}+4=\dfrac{4}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=\sqrt{xe^x}\Rightarrow V=\pi\displaystyle\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 xe^x\,dx=\left.\pi(x-1)e^x\right\|_0^1=$	**3p**
	$=0-\pi\cdot(-1)\cdot e^0=\pi$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt=\int_3^x t\,dt=\left.\frac{t^2}{2}\right\|_3^x=\frac{x^2-9}{2}$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-9}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$	**2p**