Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2$. Determinați numerele reale a, știind că $f(a)=a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{7x-5}=4^x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice relația $2^n\le 16$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2)$, $N(4,3)$ și $P(6,1)$. Determinați lungimea segmentului MQ, unde Q este mijlocul segmentului NP.

5p **6.** Arătați că $\sin 30°+\sin 45°-\cos 60°-\cos 45°=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&1\\-1&2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A(x)\cdot A(y)=3I_2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg p pentru care $\det\left(A(p)\cdot A(p)+I_2\right)=5$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-(x+y)+2$.

5p **a)** Arătați că $2*2=2$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $1*2*3*\ldots*2018$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $1\le f(x)+f(y)\le 3$, pentru orice numere reale x și y.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+12x+5$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-x^3\right)dx=9$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că $\int_2^4\dfrac{3}{f'(x)+12}dx=\dfrac{\pi}{8}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)=2\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{12}=$	**3p**
	$=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$	**2p**
2.	$f(a)=a^2-2$	**2p**
	$a^2-2=a$, deci $a=-1$ sau $a=2$	**3p**
3.	$2^{7x-5}=2^{2x}\Leftrightarrow 7x-5=2x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 4 numere care verifică relația dată, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{5}$	**2p**
5.	$Q(5,2)$	**2p**
	$MQ=\sqrt{(5-1)^2+(2-2)^2}=4$	**3p**
6.	$\sin 30°=\cos 60°$, $\sin 45°=\cos 45°$	**2p**
	$\sin 30°+\sin 45°-\cos 60°-\cos 45°=\sin 30°+\sin 45°-\sin 30°-\sin 45°=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}=2\cdot 2-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=4+1=5$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}x&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&1\\-1&2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}xy-1&x+2\\-y-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$	**3p**
	$x=-2$, $y=-2$	**2p**
c)	$A(p)\cdot A(p)+I_2=\begin{pmatrix}p^2&p+2\\-p-2&4\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(p)\cdot A(p)+I_2\right)=5p^2+4p+4$	**2p**
	$5p^2+4p+4=5\Leftrightarrow 5p^2+4p-1=0$ și, cum p este număr întreg, obținem $p=-1$	**3p**
2.a)	$2*2=2\cdot 2-(2+2)+2=$	**3p**
	$=4-4+2=2$	**2p**
b)	$x*y=xy-x-y+1+1=$	**2p**
	$=x(y-1)-(y-1)+1=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$1*x=x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$1*2*3*\ldots*2018=1*(2*3*\ldots*2018)=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+2x+2)-(x^2+x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x^2+2x}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(-1)=1$, $f'(-1)=-1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$, adică $y=-x$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-2]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,-2]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-2,0]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-2,0]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, $f(-2)=\frac{3}{2}$, $f(0)=\frac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, deci $\frac{1}{2}\leq f(x)\leq\frac{3}{2}$ și $\frac{1}{2}\leq f(y)\leq\frac{3}{2}$, de unde obținem $1\leq f(x)+f(y)\leq 3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-x^3\right)dx=\int_0^1\left(-6x^2+12x+5\right)dx=\left(-2x^3+6x^2+5x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=-2+6+5-0=9$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $F''(x)=3x^2-12x+12$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F''(x)=3(x-2)^2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci funcția F este convexă pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$f'(x)=3(x-2)^2\Rightarrow\int_2^4\frac{3}{f'(x)+12}dx=\int_2^4\frac{1}{(x-2)^2+4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}\Big\|_2^4=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=\frac{\pi}{8}$	**2p**