CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "*SEVER - AUREL GROZE*"

Ediția a VI-a, Beclean, 18 – 20 mai 2018

BAREM CLASA a VIII-a

1. *Arătați că numărul* $\underbrace{111\ldots..1}_{de\ 2019\ ori}\underbrace{555\ldots..5}_{de\ 2017\ ori}7^2$ *se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte nenule.*

Soluție și barem de notare

$\underbrace{111\ldots..1}_{de\ 2019\ ori}\underbrace{555\ldots..5}_{de\ 2017\ ori}7 = 10^{4036} + \underbrace{111\ldots1}_{2018\ ori}\cdot 10^{2018} + 5\cdot\underbrace{111\ldots1}_{2018\ ori} + 2 =$ 1p

$10^{4036} + \underbrace{111\ldots1}_{2018\ ori}\cdot\underbrace{100\ldots05}_{2019\ cifre} + 2 = 10^{4036} + \underbrace{333\ldots3}_{2018\ ori}\cdot\underbrace{333\ldots35}_{2018\ cifre} + 2 =$ 2p

$10^{4036} + (\underbrace{333\ldots34}_{2018\ cifre} - 1)\cdot(\underbrace{333\ldots34}_{2018\ cifre} + 1) + 2 = (10^{2018})^2 + \underbrace{333\ldots34}_{2018\ cifre}{}^2 + 1 = a^2 + b^2 + 1$ 2p

Deci $\underbrace{111\ldots..1}_{de\ 2019\ ori}\underbrace{555\ldots..5}_{de\ 2017\ ori}7^2 = (a^2+b^2+1)^2 = (a^2+b^2-1)^2 + (2a)^2 + (2b)^2$

se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte nenule. 2p

2. Un plan α intersectează muchiile AB, AC și AD ale tetraedrului regulat ABCD în punctele M,N, respectiv P.

   Arătați că $P_{\Delta MNP} \geq AM + AN + AP$.

I. Tudor, Băbana, Argeș
G.M. 1/2018

Soluție și barem de notare

Din teorema cosinusului în $\Delta AMN \Rightarrow MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM\cdot AN\cdot\cos(\sphericalangle MAN) \Leftrightarrow$

$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM\cdot AN\cdot\cos 60^o = AM^2 + AN^2 - AM\cdot AN$ și analoagele 2p

Notând AM=x, AN=y și AP=y,cu x,y,z > 0, putem rescrie concluzia astfel:

$\sqrt{x^2+y^2-xy}+\sqrt{x^2+z^2-xz}+\sqrt{z^2+y^2-zy} \geq x+y+z$ 1p

Cum $\sqrt{x^2+y^2-xy} \geq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x^2+y^2-xy \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2-4xy \geq (x+y)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ și analoagele, se obține prin sumare 2p

$\sqrt{x^2+y^2-xy}+\sqrt{x^2+z^2-xz}+\sqrt{z^2+y^2-zy} \geq \frac{x+y}{2}+\frac{x+z}{2}+\frac{z+y}{2} = x+y+z\ (q.e.d.)$ 2p

3. Să se determine numerele întregi x și y care verifică

$$x^3+y^3 = 7\,max(x,y)+7.$$

Soluție și barem de notare

Presupunem $x \geq y$. Ecuația devine $x^3+y^3 = 7x+7$ ***1p***

adică $x^3-7x-7=(-y)^3$. ***1p***

Pentru $x > 4$ avem $(x-1)^3 < x^3-7x-7 < x^3$, deci x^3-7x-7 nu poate fi cub perfect. ***2p***

Pentru $x \leq -2$ avem $x^3 < x^3-7x-7 < (x+1)^3$, deci x^3-7x-7 nu poate fi cub perfect.

2p

Soluțiile posibile pentru *x* sunt -1, 0, 1, 2, 3, 4.

Prin încercări găsim x = 3, y = 1.

Soluțiile ecuației sunt x = 3, y = 1 și x = 1, y = 3. ***1p***