CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "*SEVER - AUREL GROZE*"

Ediția a VI-a, Beclean, 18 – 20 mai 2018

BAREM CLASA a VII-a

1. *Pe tablă sunt scrise câteva numere naturale nenule. La fiecare pas, alegem două numere u și v, cu $u \geq v$ și le înlocuim cu $u + v$ și $u - v$.*

   Demonstrați că după un număr finit de pași nu putem obține mulțimea inițială de numere.

Soluție și barem de notare

Fie S_0 suma tuturor numerelor de pe tablă și S_i suma numerelor de pe tablă după pasul i.	*1*
Deoarece $u \geq v$, avem $(u + v) + (u - v) \geq u + v$, deci în mod necesar, $S_i \leq S_{\mathrm{i}+1}$, la fiecare pas i.	*2*
Dacă $u > v$ sunt numerele selectate la pasul i+1, atunci $S_{i+1} > S_\mathrm{i}$, deci concluzia.	*2*
Prin urmare, la pasul 1 trebuie să considerăm numerele egale $u = v$. În acest caz obținem pe tablă numărul 0, care dacă este grupat cu $u > 0$, obținem din nou că nu putem regăsi numerele inițiale.	*2*

2. *Determinați numerele întregi n cu proprietatea că numărul $n^2 + 9n + 9$ se divide cu 121.*

Gabriel Popa, Iași
G.M. 3/2018

Soluție și barem de notare

$n^2+9n+9 \vdots 121 \Rightarrow n^2+9n+9 \vdots 11$ 1p

Se verifică formele lui $n=M_{11}+r$, $r<11$, pentru care $n^2+9n+9 \vdots 11$ și se găsesc
$M_{11}+6$ și $M_{11}+7$ 2p

Pentru $n=11k+6 \Rightarrow n^2+9n+9=121k^2+11\cdot 21\cdot k+99 \vdots 121 \Rightarrow$
$7k+3 \vdots 11 \Rightarrow k=M_{11}+9 \Rightarrow n=M_{121}+105$ 2p

Pentru $n=11k+7 \Rightarrow n^2+9n+9=121k^2+11\cdot 23\cdot k+121 \vdots 121 \Rightarrow$
$k \vdots 11 \Rightarrow n=M_{121}+7$ 2p

3. *Se consideră ΔABC cu BC = 8cm, AC = 4cm,* $m(\sphericalangle B) = 28^o, m(\sphericalangle C) = 48^o$. *Aflați lungimea segmentului [AB].*

Soluție și barem

Fie $D \in$ (CA astfel încât $m(\sphericalangle DBA) = 56^o$ și (BT bisectoarea $\sphericalangle DBA \Rightarrow$ 1p

$m(\sphericalangle BDC) = 48^o \Rightarrow \Delta \mathrm{DBC}$ isoscel $\Rightarrow \mathrm{BD} = 8\mathrm{cm} \Rightarrow$ 1p

$\Delta \mathrm{BDT} \equiv \Delta \mathrm{BCA}$ (U.L.U.) $\Rightarrow \mathrm{BT} = \mathrm{DA} = \mathrm{a}$ și $\mathrm{DT} = \mathrm{AC} = 4\mathrm{cm}$ 1p

Fie $\mathrm{BM} \perp \mathrm{DC} \Rightarrow \mathrm{MT} = \mathrm{MA}$ și $\mathrm{MD} = \mathrm{MC}$ ($\Delta \mathrm{TAB}$ și $\Delta \mathrm{DBC}$ isoscele) 1p

În $\Delta \mathrm{BAD}$, (BT bisectoare $\xRightarrow{T.bis.} \frac{DT}{TA} = \frac{DB}{BA} \Rightarrow \frac{4}{TA} = \frac{8}{a} \Rightarrow \mathrm{TA} = \frac{a}{2}$ 1p

Din teorema lui Pitagora în $\Delta \mathrm{BDM}$ și $\Delta \mathrm{BMA}$ dreptunghice $\Rightarrow BM^2 = 8^2 - \left(4 + \frac{a}{4}\right)^2$ și

$BM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 \Rightarrow$ 1p

$a^2 + 2a - 48 = 0 \Rightarrow a = 6$ 1p