



COLEGIUL NAȚIONAL  
PETRU RAREȘ  
BECLEAN

## CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SEVER - AUREL GROZE"

Ediția a VI-a, Beclean, 18 – 20 mai 2018

### BAREM CLASA a VI-a

1. a) Aflați raportul prețurilor unei cărți și unui pix știind că, dacă prețul cărții crește cu  $p\%$  iar prețul pixului scade cu  $p\%$ , atunci cele două obiecte vor costa, împreună, cu  $\frac{2p}{5}\%$  mai mult decât la început.

b) Prin re tehnologizarea principalei linii de fabricație, fabrica de biciclete produce acum o bicicletă în 2 ore și 24 de minute. Știind că, înainte de re tehnologizare, procesul dura cu o oră și 20 de minute mai mult, aflați cu cât la sută a crescut producția de biciclete.

### Soluție și barem de notare

a) Notăm cu  $x$  – prețul cărții și cu  $y$  – prețul pixului.

$$\text{Obținem } x + p\% \cdot x + y - p\% \cdot y = x + y + \frac{2p}{5}\% \cdot (x + y) \Leftrightarrow \quad 2p$$

$$\frac{px}{100} - \frac{py}{100} = \frac{2p}{500}(x + y) \quad | \cdot \frac{100}{p} \Leftrightarrow x - y = \frac{2x}{5} + \frac{2y}{5} \Leftrightarrow \frac{3x}{5} = \frac{7y}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{7}{3} \quad 2p$$

b) Durata de fabricație a unei biciclete era de 224' înainte de re tehnologizare și este de 144' după re tehnologizare.

$[224, 144] = 2016 \Rightarrow$  în 2016 de minute fabrica producea înainte 9 biciclete, iar acum produce 14 biciclete, deci cu 5 biciclete mai mult. 2p

Creșterea producției este de  $\frac{5}{9} = \frac{5}{9} \cdot 100\% = 55, (5)\%$ . 1p

2. În triunghiul ascuțitunghic  $ABC$  construim  $AD \perp BC, D \in BC$ . Punctele  $P$  și  $Q$  aparțin dreptei  $AD$  astfel încât  $D \in (AP), D \in (AQ), DP = DB$  și  $DQ = DC$ . Demonstrați că  $CP \perp BQ$ .

Nicolae Stănică, Brăila  
G.M. 3/2018

### Soluție și barem de notare

$\triangle BDP$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle DBP) = 45^\circ$	1p
$\triangle CDQ$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle DCQ) = 45^\circ$	1p
Fie $\{M\} = BP \cap QC$ . În $\triangle BMC, m(\sphericalangle BMC) = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$	2p
În $\triangle BQD$ , avem $BM \perp QC, QD \perp BC \Rightarrow P$ este ortocentrul triunghiului $\Rightarrow CP \perp BQ$ .	2p 1p

### 3. Fie

$A = \{\overline{abcd} \mid \overline{ab} < \overline{cd} \text{ și } \overline{ab} \cdot (\overline{ab} + 1) \cdot (\overline{ab} + 2) \cdot \dots \cdot \overline{cd} \text{ are la final exact 15 zerouri}\}$ .

a) Arătați că mulțimea  $A$  are 105 elemente

b) Arătați că există o submulțime a lui  $A$  care are suma elementelor divizibilă cu 101.

### Soluție și barem de notare

a) Numărul de zerouri cu care se termină un produs de numere consecutive este dat de exponentul puterii lui 5 din descompunerea în factori primi a produsului. Avem 10,15,20,30,35,40,45,55,65,70,80,85,90,95 care au câte un 5 și 25,50,75 cu câte 2 de 5. 1p

Următoarele produse vor avea exact 15 factori de 5:

$10 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 70$  (sau 71,72,73,74)  $\Rightarrow \overline{abcd} \in \{1070,1071, \dots, 1074\}$  - 5 numere

$\overline{ab} \cdot (\overline{ab} + 1) \cdot \dots \cdot \overline{cd}$ , unde  $\overline{ab} \in \{16,17,18,19,20\}$  și  $\overline{cd} \in \{75,76,77,78,79\} \Rightarrow$

$5 \cdot 5 = 25$  de numere;

$\overline{ab} \in \{21,22,23,24,25\}$  și  $\overline{cd} \in \{80,81,82,83,84\} \Rightarrow 5 \cdot 5 = 25$  de numere;

$\overline{ab} \in \{26,27,28,29,30\}$  și  $\overline{cd} \in \{90,91,92,93,94\} \Rightarrow 5 \cdot 5 = 25$  de numere;

$\overline{ab} \in \{31,32,33,34,35\}$  și  $\overline{cd} \in \{95,96,97,98,99\} \Rightarrow 5 \cdot 5 = 25$  de numere;

În total,  $5+25+25+25+25=105$  numere

2p

1p

b) Notăm elementele mulțimii  $A$  cu  $x_1, x_2, \dots, x_{105}$ .

Fie  $S_1 = x_1$

$S_2 = x_1 + x_2$

.....

$S_{102} = x_1 + x_2 + \dots + x_{102}$

Avem 102 numere și 101 resturi distincte la împărțirea cu 101, deci, conform principiului

cutiei, există  $S_i$  și  $S_j, i > j$ , astfel încât  $S_i - S_j: 101 \Rightarrow x_{j+1} + x_{j+2} + \dots + x_i: 101$

2p

Submulțimea  $\{x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_i\}$  a lui  $A$  are suma elementelor divizibilă cu 101.

1p