CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "*SEVER - AUREL GROZE*"

Ediția a VI-a, Beclean, 18 – 20 mai 2018

BAREM CLASA a V-a

1. *Scriem în ordine descrescătoare numerele naturale de patru cifre diferite care au suma cifrelor 10.*

   Determinați ce poziție are numărul 2017 în această scriere.

Traian Preda, București
G.M. 2/2018

<u>Soluție și barem de notare</u>:

Vom număra toate numerele care încep cu o cifră mai mare ca 2. Pentru fiecare 4 cifre distincte cu suma 10 avem câte 6 numere distincte care încep cu aceeași primă cifră. 1p

Găsim sumele 10=7+2+1+0=6+3+1+0=5+4+1+0=5+3+2+0=4+3+2+1 1p

6 numere încep cu 7, alte 6 cu prima cifră 6, 12 au prima cifră 5, încă 12 încep cu 4,

Alte 18 au prima cifră 3. În total 54 de numere 2p

Acum vom număra toate numerele care încep cu 2 și sunt mai mari ca 2017.

Din 10=2+0+3+5=2+1+3+4 mai obținem încă 12 numere mai mare ca 2017 1p

Iar din 10=2+0+1+7, încă 5, al șaselea fiind chiar 2017 1p

Cum am numărat toate numerele care au prima cifră 2 ⇒

Există 71 de numere mai mari ca 2017, deci 2017 este al 72-lea. 1p

2. *Pentru n număr natural nenul notăm cu* $\boldsymbol{S_n}$ *suma primelor n numere naturale impare și cu $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$.*
   a) *Determinați cel mai mic număr natural m cu proprietatea că* $\boldsymbol{S_{15}}$ *divide $m!$*
   b) *Determinați toate numerele naturale n cu proprietatea că* $\boldsymbol{S_n} \nmid n!$.

Soluție și barem de notare:

a) $S_{15}=225=3^2\cdot5^2$, deci $m!\ \vdots\ 25 \Rightarrow m \geq 10$ — 2p

Cum $10!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot9\cdot10\ \vdots\ 9 \Rightarrow m = 10$ — 1p

b) $S_n=n^2 \Rightarrow$ căutam n astfel încât $n^2 \nmid n! \Leftrightarrow n \nmid (n-1)!$ — 1p

Dacă $n=p\cdot q$, $1<p<q<n$, atunci n nu verifică proprietatea — 1p

Dacă $n=k^2$, $k>2$, avem $1<k<2k<k\cdot k=n$, deci n nu verifică proprietatea

Pentru $n=1$, $1|1$, iar pentru $n=4$ obținem $4\nmid2$ — 1p

Găsim astfel ca soluții toate numerele prime și numărul 4. — 1p

3. *Fie numărul* $a = \underbrace{123456789123456789\ldots123456789}_{de\ 2018\ ori}$.
   a) *Arătați că a nu este pătrat perfect.*
   b) *Arătați că a nu este cub perfect.*

Soluție și barem de notare:

a) $789=8\cdot98+5=M_8+5 \Rightarrow a= M_8+5$, deci nu este pătrat perfect — 3p

b) $a=123456789\cdot\underbrace{1000000001000000000\ldots1000000001}_{2018\ de\ 1}$ — 1p

$123456789=9\cdot13717421 \Rightarrow a\ \vdots\ 9$ — 1p

Dar $13717421=M3+2$, $\underbrace{1000000001000000000\ldots1000000001}_{2018\ de\ 1}=M_3+2$ — 1p

$\Rightarrow 3|a$ și $27 \nmid a \Rightarrow$ a nu este cub perfect — 1p