OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE CLASA a VIII-a 12.05.2018

Problema 1.(7 puncte)

Demonstraţi următoarele inegalităţi:

a) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot(a+b+c)\geq 9$ *, oricare ar fi numerele reale strict pozitive a, b, c;*

b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}>6.$

Soluţie:

a) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot(a+b+c)=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$ ....**(1p)**

demonstrăm că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$ Adevărat..**(3p)**

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot(a+b+c)\geq 3+2+2+2=9$ ....**(1p)**

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}>2+2+2=6$..**(2p)**

Problema 2.(7 puncte)

Reprezentaţi grafic funcţia de gradul I, f:R⟶R , care verifică relaţia: $f(x)+2\cdot f(2-x)=-2\cdot x+11$, *oricare ar fi* $x\in R$ *şi demonstraţi că numărul* $\sqrt{f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2018)}$ *este număr raţional.*

Soluţie:

Considerăm funcţia de gradul I $f:R\longrightarrow R, f(x)=ax+b \Longrightarrow a=2, b=1 \Longrightarrow f(x)=2x+1$....... ....**(4p)**

Reprezentarea corectă..**(2p)**

$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2018)=2019^2 \Longrightarrow \sqrt{f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2018)}=2019\in Q$.**(1p)**

Problema 3.(7 puncte)

În interiorul tetraedrului regulat ABCD se ia un punct T astfel încât $TA=\sqrt{6}\,cm, TA=TB=TC=3\sqrt{2}\,cm.$ *Calculaţi volumul tetraedrului.*

Soluţie: desen corect..**(1p)**

Fie a latura tetraedrului şi O piciorul înălţimii duse din A.Demonstrăm că T este pe înălţimea AO a tetraedrului

Dacă Q este piciorul perpendicularei din T pe planul bazei, $\Delta TQB\equiv\Delta TQC\equiv\Delta TQD(I.C.)\Longrightarrow QB=QC=QD\Longrightarrow Q=O$ ....**(2p)**

$TO=\sqrt{6}\left(\frac{a}{3}-1\right), AO=\frac{a\sqrt{6}}{3}, OB=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ ....**(1p)**

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\Delta TBO\Longrightarrow a^2-4a-12=0\Longrightarrow a=6\,cm$ ....**(2p)**

$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=18\sqrt{2}\,cm$ ....**(1p)**

Problema 4.(7 puncte)

Un con circular drept (raza egală cu x) şi un trunchi de con circular drept (raza mare R şi raza mică r) au înălţimile congruente şi volumele egale. Să se demonstreze că razele bazelor celor două corpuri pot forma un triunghi.

Soluţie:

$V_{trunchi}=V_{con}\Longrightarrow R^2+r^2+R\cdot r=x^2$ ....**(3p)**

Dem că $R+r>x$: $R^2+r^2+R\cdot r>x^2-R\cdot r\Longrightarrow(R+r)^2>x^2\Longrightarrow R+r>x$..........................**(2p)**

Dem că $R-r<x$: $R^2+r^2+R\cdot r<x^2+3R\cdot r\Longrightarrow(R-r)^2<x^2\Longrightarrow R-r<x$..........................**(2p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!