OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE CLASA a VII-a 12.05.2018

Problema 1.(7 puncte)

Arătaţi că $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\cdots+\frac{\sqrt{2018\cdot 2019}}{4037}<1009$.

Soluţie:

Folosim inegalitatea mediilor $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ ....**(1p)**

$\sqrt{1\cdot 2}<\frac{1+2}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}<\frac{1}{2}$; $\sqrt{2\cdot 3}<\frac{2+3}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5}<\frac{1}{2}$;......; $\sqrt{2018\cdot 2019}<\frac{2018+2019}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2018\cdot 2019}}{4037}<\frac{1}{2}$ ...**(4p)**

Adunând relaţiile $\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\cdots+\frac{\sqrt{2018\cdot 2019}}{4037}<2018\cdot\frac{1}{2}=1009$...**(2p)**

Problema 2.(7 puncte)

a) Pe un cerc sunt 11 numere naturale astfel încât suma oricăror 3 numere alăturate este cel mult 19, iar suma oricăror 4 numere alăturate este cel puţin 25. Să se determine suma celor 11 numere.

b) Demonstraţi că $\sqrt{2}\in R\setminus Q$.

Soluţie: a) Fie $a_1,a_2,a_3,\dots,a_{11}$ cele 11 numere

$$\left.\begin{matrix}a_1+a_2+a_3\le 19\\ a_2+a_3+a_4\le 19\\ \dots\dots\dots\\ a_{11}+a_1+a_2\le 19\end{matrix}\right\}\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{11}\le\frac{19\cdot 11}{3}\approx 69{,}6$$ ....**(2p)**

$$\left.\begin{matrix}a_1+a_2+a_3+a_4\ge 25\\ a_2+a_3+a_4+a_5\ge 25\\ \dots\dots\dots\\ a_{11}+a_1+a_2+a_3\ge 25\end{matrix}\right\}\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{11}\ge\frac{25\cdot 11}{4}\approx 68{,}7$$ ....**(1p)**

Atunci $a_1+a_2+\cdots+a_{11}=69$..**(1p)**

b) Presupunem că $\sqrt{2}\in Q\Rightarrow$ există $m,n\in N,n\ne 0,(m;n)=1$, astfel încât $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$........ ....**(1p)**

$\Rightarrow m^2=2n^2\Rightarrow 2|m^2\Rightarrow 2|m\Rightarrow m=2k,k\in N$...**(1p)**

$4\mathrm{k}^2=2n^2\Rightarrow 2\mathrm{k}^2=n^2\Rightarrow 2|n$, contradicţie cu $(m;n)=1\Rightarrow\sqrt{2}\in R\setminus Q$. ....**(1p)**

Problema 3.(7 puncte)

În triunghiul ABC, AB=13 cm, BC=14 cm, AC=15 cm. Fie punctele $M\in(AB),N\in(BC),P\in(AC)$*, astfel încât AM=3 cm, BN=4 cm, CP=5cm. Aflaţi aria triunghiului MNP.*

Soluţie: desen corect...**(1p)**

$\mathrm{A_{ABC}}=84\mathrm{cm}^2$ ....**(2p)**

$\mathrm{A_{AMP}}+\mathrm{A_{BMN}}+\mathrm{A_{CNP}}+\mathrm{A_{MNP}}=\mathrm{A_{ABC}}\ |:\mathrm{A_{ABC}}\Rightarrow\frac{\mathrm{A_{AMP}}}{\mathrm{A_{ABC}}}+\frac{\mathrm{A_{BMN}}}{\mathrm{A_{ABC}}}+\frac{\mathrm{A_{CNP}}}{\mathrm{A_{ABC}}}+\frac{\mathrm{A_{MNP}}}{\mathrm{A_{ABC}}}=1$ ....**(2p)**

$\frac{AM\cdot AP}{AB\cdot AC}+\frac{BN\cdot BM}{BC\cdot BA}+\frac{CP\cdot CN}{CA\cdot CB}+\frac{\mathrm{A_{MNP}}}{\mathrm{A_{ABC}}}=1\Rightarrow\frac{\mathrm{A_{MNP}}}{\mathrm{A_{ABC}}}=\frac{106}{273}$..**(1p)**

$A_{MNP}=\frac{424}{13}cm^2$ ....**(1p)**

Problema 4.(7 puncte)

Fie ABCD pătrat, M un punct oarecare pe (AB), iar $N\in(BC)$ *astfel încât* $MN\perp MD$*. Arătaţi că* $AM\cdot AB+CN\cdot CB=DM^2$.

Soluţie: desen corect...**(1p)**

Notăm cu a latura pătratului, AM=x, CN=y

Scriem Teorema lui Pitagora în ΔDMN: $DM^2+MN^2=DN^2$...**(2p)**

$a^2+x^2+(a-x)^2+(a-y)^2=a^2+y^2$ ....**(1p)**

$a^2+x^2=\mathrm{a}\cdot\mathrm{x}+a\cdot y$ ....**(2p)**

$DM^2=AM\cdot AB+CN\cdot CB$ ....**(1p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!