CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”
Ediția a XVII – a **05.05.2018**
Clasa a V – a **Proba echipaj**

1. Dacă $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 25 + \overline{ab}$ dă restul 3 la împărțirea cu 55, atunci numărul $\overline{ab}$ are produsul cifrelor:
a: 0 **b:** 40 **c:** 24 **d:** 72.

2. Dacă suma a două numere este 28, iar o treime din primul număr este cât o pătrime din al doilea număr, atunci diferența dintre al doilea număr și primul număr este:
a: 1 **b:** 7 **c:** 4 **d:** 14.

3. Dacă $x = 2^{31} \cdot 5^{30} - 1$, atunci suma cifrelor numărului x este:
a: 45 **b:** 271 **c:** 2 **d:** 330.

4. Dacă $\overline{abc}$ este un număr de trei cifre scris în baza 10 astfel încât $\overline{abc} = 100c + 10b + a$ și $\overline{abc}$
se divide cu 5, atunci numărul de numere $\overline{abc}$ cu aceste proprietăți este:
a: 100 **b:** 180 **c:** 256 **d:** 10.

5. Un elev își propune să citescă în prima zi o pagină dintr-o carte cu 1023 de pagini, iar în fiecare zi care urmează un număr dublu de pagini față de cele citite în ziua anterioară. Numărul zilelor în care va termina de citit cartea va fi:
a: 1024 **b:** 10 **c:** 8 **d:** 20.

6. Fracția ordinară $\frac{10n+2}{10n+3}$, cu n număr natural, scrisă ca fracție zecimală este:
a: finită **b:** periodică simplă **c:** periodică mixtă **d:** nu se poate preciza.

7. Suma numerelor naturale nenule care împărțite la 7 dau câtul c și restul r, iar împărțite la 11 dau câtul r și restul c este:
a: 114 **b:** 43 **c:** 18 **d:** 201.

8. Numerele naturale a, b și c îndeplinesc simultan condițiile $2a+3b+6c=37$ și $8a+7b+4c=53$, atunci $b+4c$ are valoarea:
a: 20 **b:** 16 **c:** 45 **d:** 19.

9. Media aritmetică a n numere naturale este 41. Dacă se mai adaugă n, media celor $n + 1$ numere devine 40. Numărul n are suma cifrelor:
a: 7 **b:** 2 **c:** 9 **d:** 6.

10. Andrei și Florin au împreună 20 lei. Dacă Florin primește de la Andrei 2 lei și 1 leu de la bunica sa, atunci el are o sumă de două ori mai mare ca Andrei. Numărul ce reprezintă suma inițială a lui Andrei este:
a: prim **b:** pătrat perfect **c:** cub perfect **d:** par.

Timp efectiv de lucru: 1 oră.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”
Ediția a XVII – a 05.05.2018
Clasa a VI – a Proba echipaj

1. Nouă muncitori termină o lucrare, lucrând 8h/zi timp de 3 zile. Lucrând în aceleași condiții, câte 6h/zi, muncitorii vor termina lucrarea în:
a: 8 zile **b:** 4 zile **c:** 6 zile **d:** 3 zile.

2. Probabilitatea ca un număr natural de două cifre să fie pătrat perfect este:
a: $\frac{2}{3}$ **b:** $\frac{1}{2}$ **c:** $\frac{1}{15}$ **d:** $\frac{6}{7}$.

3. Fie *a*, *b*, *c* trei numere naturale. Dacă *c* este 25% din *a* + *c* și *b* + *c* este 70% din *a* + *b* + *c*, atunci *a*, *b*, *c* sunt direct proporționale cu:
a: 2, 3, 1 **b:** 3, 4, 1 **c:** 3,6,1 **d:** 3, 7, 1.

4. În ΔABC, m(∡A) = 60^0, m(∡B) = 50^0. Măsura unghiului ascuțit format de înălțimea din A și bisectoarea din C este:
a: 10^0 **b:** 70^0 **c:** 35^0 **d:** 55^0.

5. Dacă numerele naturale *a* și *b* îndeplinesc condiția 3*a* + *b* = 132 și [*a*; *b*] = 10 · (*a*; *b*), unde [*a*; *b*] = c.m.m.m.c și (*a*; *b*) = c.m.m.d.c, atunci:
a: $\begin{cases} a = 16 \\ b = 84 \end{cases}$ **b:** $\begin{cases} a = 18 \\ b = 72 \end{cases}$ **c:** $\begin{cases} a = 20 \\ b = 72 \end{cases}$ **d:** $\begin{cases} 24 \\ 60 \end{cases}$.

6. Fie proporțiile $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ și S = $x^2 + y^2 + z^2$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}$, atunci valoarea minimă a lui S este:
a: 201 **b:** 305 **c:** 433 **d:** 479.

7. Dacă suplementul unui unghi este de 4 ori mai mare decât complementul lui, măsura unghiului este cuprinsă între:
a: 25^0 și 39^0 **b:** 40^0 și 55^0 **c:** 56^0 și 70^0 **d:** 71^0 și 85^0.

8. Câte cifre are numărul $3 \cdot 8^6 \cdot 25^7$:
a: 7 **b:** 16 **c:** 14 **d:** 15

9. Dacă ∡AOB și ∡BOC sunt adiacente, (OM și (ON fiind bisectoarele lor, m(∡MON) = 25^0 iar m(∡AOB) = 4 · m(∡BOC), atunci m(∡BOC) este:
a: 25^0 **b:** 50^0 **c:** 10^0 **d:** 40^0.

10. În ΔABC cu BC = 10 cm, bisectoarele unghiurilor ∡B și ∡C se intersectează în D. Paralela prin D la BC intersectează AB și AC în E și F. Dacă EF = 6 cm, atunci perimetrul patrulaterului BCFE este:
a: 32 cm **b:** 26 cm **c:** 22 cm **d:** 60 cm.

Timp efectiv de lucru: 1 oră.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”
Ediția a XVII – a 05.05.2018
Clasa a VII – a Proba echipaj

1. Dacă $a = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{2}{\sqrt{2}}$ și $b = \frac{2016-\sqrt{2017}}{\sqrt{2017}-2016}$, atunci:
a: $a < b$ **b:** $a > b$ **c:** $a = b$ **d:** $a - b = 3$.

2. Valoarea maximă a numărului $p = 3 - x - x^2$ este:
a: 3 **b:** 0 **c:** 3,5 **d:** 3,25.

3. Într-un triunghi cu lungimile laturilor 8 cm, 15 cm și respectiv 17 cm, distanța dintre vârful unghiului celui mai mare unghi al său și centrul cercului circumscris este:
a: 40 cm **b:** 7,5 cm **c:** 8,5 cm **d:** 8 cm.

4. Rezultatul calculului $\left(\frac{|\sqrt{3}-1|}{2} + \frac{|\sqrt{3}-2|}{6} + \frac{|2\sqrt{3}-4|}{4}\right) : \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{300}}$ este:
a: $\frac{5-\sqrt{3}}{3}$ **b:** $\frac{\sqrt{3}-5}{3}$ **c:** $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ **d:** $\frac{\sqrt{3}-3}{3}$.

5. Dacă $x + \frac{1}{x} = 2$, atunci $x^8 + \frac{1}{x^8}$ are valoarea:
a: 128 **b:** 16 **c:** 2 **d:** 8

6. În ΔABC isoscel cu AB = AC = 25 cm și BC = 30 cm, înălțimea corespunzătoare laturii [AC] are lungimea:
a: 20 cm **b:** 15 cm **c:** 24 cm **d:** 26 cm.

7. Triunghiul în care are loc relația:
$a^3(a+1) + b^3(b+1) + c^3(c+1) = a^2(a+2b^2) + b^2(b-2c^2) + c^2(c+2a^2)$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor sale este:
a: obtuzunghic **b:** echilateral **c:** ascuțitunghic **d:** dreptunghic

8. Numerele raționale x și y satisfac relația $(5+2\sqrt{2})x + (1-\sqrt{2})y = 4 + 3\sqrt{2}$. Valoarea numărului $z = (x+y)^{2017}$ este:
a: 1 **b:** 0 **c:** 3^{2016} **d:** -1.

9. Fie trapezul dreptunghic și ortodiagonal ABCD. Dacă AB | | CD, m(∡A) = m(∡D) = 90^0, AB = a, CD = b, cu $a < b$, atunci:
a: AD = $a - b$ **b:** AD = $a + b$ **c:** AD = $a \cdot b$ **d:** AD = $\sqrt{ab}$.

10. Valoarea numărului $A = (\sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{2000}}) : (\sqrt{2^{2000}} - 1)$ este:
a: 2 **b:** $\sqrt{2}$ **c:** $\sqrt{2} + 2$ **d.** $2 - \sqrt{2}$.

Timp efectiv de lucru: 1 oră.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”
Ediția a XVII – a 05.05.2018
Clasa a VIII – a Proba echipaj

1. Dacă $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ și $b = -\frac{4-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ atunci:

a: $a > b$ **b:** $a < b$ **c:** $a = b$ **d:** $a + b = 6$.

2. Cincimea și pătrimea unui număr natural sunt două numere naturale consecutive. Suma cifrelor acestui număr este:

a: 2 **b:** 11 **c:** 12 **d:** 7

3. Fie VABC o piramidă triunghiulară regulată cu baza ΔABC echilateral în care $m(\measuredangle AVM) = 90^0$, unde M este mijlocul muchiei [BC]. Măsura unghiului dintre VB și CV este:

a: 30^0 **b:** 45^0 **c:** 60^0 **d:** 90^0

4. Fie funcțiile f, g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$, $g(x) = 2 - x$. Aria triunghiului cuprins între cele două grafice și axa ordonatelor este:

a: $8u^2$ **b:** $4u^2$ **dc**$16u^2$ **d:** $2u^2$.

5. Dacă $\sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{y^2 + 6y + 13} \leq 5$, atunci suma numerelor x și y este:

a: -1 **b:** 1 **c:** -2 **d:** 2

6. Într-un cub $ABCDA_1B_1C_1D_1$ distanța dintre planele (A_1BD) și (B_1D_1C) este $2\sqrt{3}$. Muchia cubului este:

a: 12 cm **b:** 8 cm **c:** 6 cm **d:** 4 cm.

7. Un paralelipiped dreptunghic are diagonala 15 cm și suma tuturor muchiilor 100 cm. Aria totală a paralelipipedului dreptunghic este:

a: 115 cm^2 **b:** 850 cm^2 **c:** 50 cm^2 **d:** 400 cm^2.

8. Mulțimea soluțiilor inecuației $x\sqrt{3} - 2 \geq 2x - \sqrt{3}$ este:

a: $(-\infty, 1]$ **b:** $(-\infty, -1]$ **c:** $[-1, +\infty)$ **d:** $[1, +\infty)$

9. Fie $a, b \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea $a(2 - \sqrt{2}) - b\sqrt{2} = \sqrt{2}(b\sqrt{2} - 8)$. Suma numerelor a și b este:

a: 3 **b:** 5 **c:** 8 **d:** 7

10. Fie o prismă triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ cu baza ΔABC echilateral. Dacă D ste piciorul înălțimii din A pe BC și P un punct pe [AB] astfel încât AD = AP, atunci măsura unghiului dintre DP și A_1B_1 este:

a: 30^0 **b:** 45^0 **c:** 60^0 **d:** 75^0

Timp efectiv de lucru: 1 oră.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”
Ediția a XVII – a 05.05.2018
Clasa a V – a Proba individuală

Subiectul I (50p). Pe foaia de concurs scrieți în grilă numai rezultatele.

1. Rezultatul calculului $0,09 + 0,1^2 + 1^{2018}$ este:
a: 1,19 **b:** 2018,19 **c:** 1,1 **d:** 0,19.

2. Dacă suma dintre jumătatea numărului x și sfertul numărului x este 0,25 atunci x este:
a: 0,(3) **b:** 0,(5) **c:** 0,(6) **d:** 0,(8).

3. Diferența resturilor împărțirii numerelor 78 și 103 la 17 este:
a: 8 **b:** 9 **c:** 11 **d:** 7.

4. Soluția ecuației $3 – (4,2 – 2x) = 1,12$ este:
a: 2,5 **b:** 0,16 **c:** 1,16 **d:** 0,5.

5. După simplificarea fracției $\frac{515151}{151515}$, fracția ireductibilă obținută este:
a: $\frac{7}{5}$ **b:** $\frac{17}{5}$ **c:** $\frac{1}{5}$ **d:** 5.

6. Dacă $\overline{0,x(y)} = \frac{4}{15}$, atunci (x, y) este:
a: (1; 6) **b:** (0; 4) **c:** (2; 6) **d:** (3; 9).

7. 2019 împărțit la $n + 3$ dă câtul 9 și restul maxim. Atunci n este:
a: 200 **b:** 199 **c:** 201 **d:** 198.

8. A 2018-a zecimală a numărului 0,5(4872) este:
a: 4 **b:** 8 **c:** 2 **d:** 7.

9. Cel mai mare dintre numerele $a = 0,075$ și $b = 0,07(5)$, $c = 0,0(75)$ și $d = 0,(075)$ este:
a: a **b:** b **c:** c **d:** d.

10. Pentru câte numere $\overline{ab}$, fracția $\frac{\overline{37ab}}{\overline{3ab7}}$ e supraunitară?
a: 90 **b:** 67 **c:** 68 **d:** 100.

Subiectul al II – lea (40p). Pe foaia de concurs scrieți rezolvările complete.

1. O persoană a parcurs o distanță d, număr natural impar, $200 < d < 250$. După prima zi constată că distanța parcursă care e număr natural, reprezintă $\frac{7}{8}$ din rest.

a) Aflați lungimea drumului;

b) Știind că a mers 3 ore cu viteza de 35 km/h și 2 ore cu viteza de 60 km/h, aflați viteza medie.

2. Fie numărul $A = \overline{0,ab(c)} + \overline{0,bc(a)} + \overline{0,ca(b)} + \overline{0,0(a)} + \overline{0,0(b)} + \overline{0,0(c)}$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ și distincte.

a) Pentru $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$, aflați A;

b) Arătați că $0,7(3) \leq A \leq 2,9(3)$;

c) Aflați cel mai mic număr natural nenul n pentru care $n \cdot A \in \mathbb{N}$;

d) Aflați $a + b + c$ pentru care A e fracție zecimală finită.

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”
Ediția a XVII – a 05.05.2018
Clasa a VI – a Proba individuală

Subiectul I (50p). Pe foaia de concurs scrieți în grilă numai rezultatele.

1. Fie mulțimea M = $\left\{\overline{ab} \mid \frac{4a+7}{6b+7} = \frac{2a}{3b}, a, b \in \mathbb{N}^*\right\}$. Cardinalul mulțimii A este egal cu:
a: 2 **b:** 3 **c:** 4 **d:** 6
2. Câte numere naturale mai mici decât 100 au exact 3 divizori?
a: 10 **b:** 9 **c:** 4 **d:** 6
3. Bisectoarele a două unghiuiri adiacente $\measuredangle$AOB și $\measuredangle$BOC sunt perpendiculare și m($\measuredangle$COB) = $\frac{1}{3}$m($\measuredangle$AOB). Atunci m($\measuredangle$AOB) este:
a: 45^0 **b:** 75^0 **c:** 135^0 **d:** 105^0
4. Dacă $\frac{x}{2^{100}+2^{102}} = \frac{3}{5 \cdot 2^{101}}$, atunci *x* este:
a: 3 **b:** 5 **c:** $\frac{3}{2}$ **d:** $\frac{3}{5}$
5. După o scumpire cu 10%, apoi o ieftinire cu 10%, prețul final este cu 16 lei mai mic decât prețul inițial. Prețul inițial este:
a: 1600 **b:** 1625 **c:** 1500 **d:** 1609.
6. Distanța dintre două orașe este 240 km. Scara hărții este $\frac{1}{2000000}$. Distanța pe hartă este:
a: 24 cm **b:** 20 cm **c:** 48 cm **d:** 12 cm.
7. Fie două drepte paralele tăiate de o secantă. Bisectoarele a două unghiuri interne de aceeași parte formează un unghi cu măsura de:
a: 60^0 **b:** 90^0 **c:** 120^0 **d:** 45^0
8. Suma numerelor naturale *n* ce verifică relația $\overline{ab}^2(n+1) = 2000$ este egală cu:
a: 199 **b:** 147 **c:** 23 **d:** 104.
9. Dacă numerele *x*, *y* și *z* sunt direct proporționale cu *x* + 1, *y* + 2 și *z* + 3, iar $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 72$, atunci suma *x* + *y* + *z* este egală cu:
a: $\frac{1}{2}$ **b:** $\frac{1}{3}$ **c:** $\frac{1}{4}$ **d:** 1.
10. În ΔABC, $\measuredangle BAC$, $\measuredangle B$ exterior și $\measuredangle C$ exterior au măsurile *x*, 2*x* + 10^0 și respectiv 2*x* – 10^0. Atunci *x* este egal cu:
a: 45^0 **b:** 50^0 **c:** 60^0 **d:** 30^0.

Subiectul al II – lea (40p). Pe foaia de concurs scrieți rezolvările complete.

1. Într-o urnă sunt *n* bile albe, roșii și negre, $n \in \mathbb{N}^*$. Probabilitatea de a extrage o bilă alba este $\frac{1}{3}$, iar probabilitatea de a extrage o bilă roșie este $\frac{5}{12}$. Aflați numărul bilelor din fiecare culoare în următoarele cazuri: **a)** *n* = 48; **b)** 70 < *n* < 80

2. În ΔABC cu m($\measuredangle$A) = 90^0, AC > AB, mediatoarea laturii [AC] intersectează bisectoarea unghiului $\measuredangle$B în P, iar CP ∩ AB = {Q}. Demonstrați că:

a) ΔPAC este isoscel; **b)** $AP = \frac{QC}{2}$; **c)** ΔQBC este isoscel; **d)** $QO \perp BC$, unde $BP \cap AC = \{O\}$.

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”

Ediția a XVII – a 05.05.2018

Clasa a VII – a Proba individuală

Subiectul I (50p). Pe foaia de concurs scrieți în grilă numai rezultatele.

1. Dacă $a^2 + \frac{1}{a^2} = 27$ și $a > 1$, atunci $a - \frac{1}{a}$ este egal cu:

a: 5 **b:** $3\sqrt{5}$ **c:** $3\sqrt{3}$ **d:** $\sqrt{29}$.

2. Dacă $x(x + 1) - 2 = 0$, atunci $E = (x^2 + x + 1)^2 + 2(x^2 + x + 3) + 1$ are valoarea:

a: 10 **b:** 20 **c: 15** **d:** 24.

3. Minimul expresiei $9x^2 - 12x + 5$ este:

a: 5 **b:** 4 **c:** 1 **d:** 0.

4. $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ este număr:

a: irațional **b:** prim **c:** pătrat perfect **d:** negativ.

5. Dacă $a - b = \sqrt{2} - 1$, atunci $a^2 + 2a + b^2 - 2b$ este egal cu:

a: $3 - 2\sqrt{2}$ **b:** 0 **c:** 1 **d:** $\sqrt{2} + 1$.

6. În ΔABC, M este mijlocul lui [AB] și G centrul de greutate al triunghiului. Dacă aria ΔAMG este 10 cm^2, atunci aria ΔABC este:

a: 60 cm^2 **b:** 120 cm^2 **c:** 100 cm^2 **d:** 40 cm^2.

7. Fie patrulaterul ABCD cu AB | | CD și O mijlocul lui [AC], $AC \cap BD = \{O\}$. Atunci ABCD este:

a: trapez **b:** romb **c:** dreptunghi **d:** paralelogram.

8. Fie ABCD trapez, AB | | CD și M mijlocul lui [BC]. Dacă aria ΔAMD este 15 cm^2, atunci aria trapezului este:

a: 25 cm^2 **b:** 30 cm^2 **c:** 27 cm^2 **d:** 20 cm^2

9. ABCD pătrat, M mijlocul laturii [CD] și $d(B, AM) = 4\sqrt{5}$. Aria pătratului este:

a: 80 **b:** 120 **c:** 100 **d:** 60.

10. Dacă $a^2 + b^2 - 2a\sqrt{2} - 2b\sqrt{3} + 5 = 0$, atunci produsul $\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)(b - a)$ este egal cu:

a: 0 **b:** 2 **c:** 5 **d:** 1.

Subiectul al II – lea (40p). Pe foaia de concurs scrieți rezolvările complete.

1. Fie $E(x) = x^4 - 7x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Aflați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $E(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$;

b) Dacă $a = -3$ și $b = 3$, aflați valorile lui x pentru care $E(x)$ este număr prim.

2. Fie trapezul ABCD, AB | | CD, $AC \perp BD$, AC = 9 cm și BD = 12 cm.

a) Aflați aria trapezului;

b) Demonstrați că, dacă AD < BC, atunci $d(O, AD) > d(O, BC)$, $AC \cap BD = \{O\}$;

c) Arătați că $AC^2 + BD^2 = (AB + CD)^2$;

d) Demonstrați că AB + CD < AD + BC.

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”
Ediția a XVII – a 05.05.2018
Clasa a VIII – a Proba individuală

Subiectul I (50p). Pe foaia de concurs scrieți în grilă numai rezultatele.

1. Fie funcția f : ℕ → ℕ cu proprietatea $f(n + 1) – f(n) = 2n + 1$ și $f(0) = 1$. Atunci f(10) este:
a: 101 **b:** 100 **c:** 121 **d:** 99.

2. Dacă $x – 3y + 1 = 0$ și $x \in [– 1; 2]$, atunci $E = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$ este:
a: $2\sqrt{3}$ **b:** $5\sqrt{2}$ **c:** $2\sqrt{5}$ **d:** $\sqrt{10}$.

3. Ecuația $mx^2 – (m + 1)x + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$, are o singură soluție dacă m aparține mulțimii:
a: {1} **b:** {0; 1} **c:** {1; – 1} **d:** {– 1; 0; 1}.

4. Valoarea maximă a raportului $\frac{2x^2-4x+7}{x^2-2x+3}$ se obține pentru x egal cu:
a: $\frac{7}{3}$ **b:** 2 **c:** 1 **d:** $\frac{2}{3}$

5. Dacă $0 < x < y$ și $(x – y)(3x – 2y) = 2xy$, atunci valoarea fracției $\frac{x+y}{x-y}$ este:
a: 2 **b:** – 2 **c:** $\frac{1}{3}$ **d:** $-\frac{1}{2}$

6. Pătratele ABCD și ADEF sunt situate în plane perpendiculare. Măsura unghiului dintre dreptele FB și AC este:
a: 30^0 **b:** 45^0 **c:** 60^0 **d:** 90^0.

7. Într-o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de $6\sqrt{3}$ cm și înălțimea de 3 cm, măsura unghiului format de două fețe laterale opuse este:
a: 45^0 **b:** 120^0 **c:** 60^0 **d:** 90^0

8. Un pătrat ABCD se îndoaie după diagonala [AC] astfel încât ΔDAB devine echilateral. Distanța de la D la planul (ABC) este:
a: a **b:** $a\sqrt{2}$ **c:** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **d:** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

9. Triunghiurile ΔABC și ΔDBC sunt situate în plane diferite, iar raportul ariilo lor este $\frac{3}{2}$. Dacă proiecția lui D pe planul (ABC) este centrul de greutate al triunghiului ΔABC, atunci unghiul format de cele două plane are măsura:
a: 90^0 **b:** 60^0 **c:** 45^0 **d:** 30^0

10. Muchia cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este de 10 cm. Aria totală a tetraedrului AB_1CD_1 este egală cu:
a: 400 **b:** $200\sqrt{3}$ **c:** $100\sqrt{2}$ **d:** $100\sqrt{3}$

Subiectul al II – lea (40p). Pe foaia de concurs scrieți rezolvările complete.

1. Fie f : ℝ → ℝ, $f(x) = (a – 1) x + b + 1$ și punctele A(0; 4) și B(– 2; 0).
a) Aflați a și b știind că $f(a) = 10$ și mijlocul lui [AB] aparține graficului funcției f;

b) Să se afle a și b știind că P(1; 6) aparține graficului și $a \cdot b$ este maxim;

c) Determinați coordonatele punctului C știind că originea O este centrul de greutate al ΔABC.

2. Fie VABC piramidă regulate, AB = 18 cm și tg $\measuredangle$(VA; (ABC)) = $\sqrt{2}$.

a) Aflați înălțimea piramidei și d(A, (VBC));

b) Fie P un punct interior egal depărtat de A, B, C și V. Demonstrați că AP ⊥ (VBC)

c) Dacă Q ϵ [AB] și $QV^2 + QM^2$ = minim, unde M este mijlocul lui [BC], aflați $\frac{QB}{QA}$.

Timp efectiv de lucru: 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”

Ediția a XVII – a 05.05.2018

Clasa a V–a Proba individuală

Barem de corectare

Subiect I	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Oficiu**
Punctaj	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**10p**
Soluția	**c**	**a**	**b**	**c**	**b**	**c**	**b**	**a**	**c**	**b**	**-**

Subiect II(problema 1 - 20 p)

1.a) Fie d distanța.

În prima zi: $\frac{7}{8}r \in \mathbb{N} \Rightarrow r \vdots 8 \Rightarrow r = 8k,\ k \in \mathbb{N}$ --**3p**

$\Rightarrow d = 15k$ ---**2p**

Cum d impar $\Rightarrow k$ impar --**1p**

$200 < 15k < 250 \Rightarrow k \in \{14; 15; 16\}$ -- **3p**

$\Rightarrow k = 15 \Rightarrow d = 225$ --- **1p**

b) $v_m = m_{a.p} = \frac{\mathbf{v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2}}{\mathbf{t_1 + t_2}}$ ---**5p**

$v_m = \frac{3 \cdot 35 + 2 \cdot 60}{3+2} \Rightarrow v_m = 45 km/h$ --**5p**

Subiect II(problema 2 - 20 p)

a) A = 0,13(5) + 0,35(1) + 0,51(3) + 0,0(1) + 0,0(3) + 0,0(5)

$A = \frac{11}{10}$ --**10p**

b) Notăm $a + b + c$ = S

$A = \frac{11S}{90}$ --**1p**

min($a + b + c$) = 6; max($a + b + c$) = 24 --**1p**

$6 \leq S \leq 24 \mid \cdot \frac{11}{90} \Rightarrow \frac{11}{15} \leq \frac{11\,S}{90} \leq \frac{44}{15}$ ---**1p**

$0{,}7(3) = \frac{11}{15}$; $2{,}9(3) = \frac{44}{15} \Rightarrow 0{,}7(3) \leq A \leq 2{,}9(3)$ ---------------------------------------**2p**

c) $\frac{n \cdot 11 \cdot S}{90} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \mid 90$ și $S \mid 90$ --- **1p**

n = minim $\Rightarrow$ S = max --- **1p**

dar S ≤ 24 ⟹ S = 18 -- **1p**

$\frac{n \cdot 11 \cdot 18}{90} = \frac{n \cdot 11}{5} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \vdots 5$ --- **1p**

d) $A = \frac{11\,S}{90}$

$90 = 3^2 \cdot 2 \cdot 5$ ---**2p**

A = fracție zecimală finite dacă $11S \vdots 9$ -- 1p

Dar $(11; 9) = 1 \Longrightarrow S \vdots 9$ --1p

$6 \leq S \leq 24 \Longrightarrow S \in \{9; 18\}$ --1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA"
Ediția a XVII – a 05.05.2018
Clasa a V–a Proba echipaj
Barem de corectare

Subiect	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Punctaj	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**
Soluția	**b**	**c**	**b**	**d**	**b**	**b**	**a**	**d**	**b**	**b**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA"
Ediția a XVII – a 05.05.2018
Clasa a VI–a Proba individuală
Barem de corectare

Subiect I	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Oficiu**
Punctaj	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**10p**
Soluția	**b**	**c**	**c**	**c**	**a**	**d**	**b**	**c**	**c**	**c**	**-**

Subiect II(problema 1 - 20 p)

1. a) $n = 48$,

x = numărul bilelor albe, y = numărul bilelor roșii, z = numărul bilelor negre

$P_1 = \frac{x}{48}$, $P_1 = \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{x}{48} = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = 16$ bile albe -- 4p

$P_2 = \frac{y}{48}$, $P_2 = \frac{5}{12} \Longrightarrow \frac{y}{48} = \frac{5}{12} \Longrightarrow y = 20$ bile roșii -- 4p

$z = 48 - 36 \Longrightarrow z = 12$ bile negre --2p

b) $P_1 = \frac{x}{n}$, $P_1 = \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{x}{n} = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \frac{n}{3} \Longrightarrow n \vdots 3$ --2p

$P_2 = \frac{y}{n}$, $P_2 = \frac{5}{12} \Longrightarrow \frac{y}{n} = \frac{5}{12} \Longrightarrow y = \frac{5n}{12} \Longrightarrow n \vdots 12$ --2p

$\begin{cases} n \vdots 3, n \vdots 12 \Longrightarrow n \vdots 12 \Longrightarrow n = 12k \\ 70<n<80 \\ n = 72 \end{cases} \Longrightarrow 70 < 12k < 80 \Longrightarrow k = 6$ --3p

$x = \frac{n}{3} = 24$, $y = 30$, $z = 18$ --3p

Subiect II(problema 2 - 20 p)

a) Fie M mijlocul lui [AC]

$\Delta PMA \equiv \Delta PMC$(C.C) $\Longrightarrow [PA] \equiv [PC]$ $\Delta\Longrightarrow$ PAC isoscel -- 5p

b) $[PA] \equiv [PC] \Longrightarrow m(\measuredangle PCA) = m(\measuredangle PAC) = x$ --1p

$m(\measuredangle CAQ) = 90^0 \Longrightarrow m(\measuredangle PAQ) = 90^0 - x$ -- 1p

Din $\Delta CAQ \Longrightarrow m(\measuredangle CQA) = 90^0 - x$ -- 1p

$\begin{cases} \Delta APQ \text{ isoscel, } [AQ] \text{ bază} \Rightarrow AP = PQ \\ \text{Cum } AP = PC \Rightarrow PQ = PC = AP \Rightarrow AP = \frac{QC}{2} \end{cases}$ --2p

c) P mijlocul [QC] $\Rightarrow$ [BP] mediană --**2p**
[BP] mediană și înălțime $\Longrightarrow$ ΔBQC isoscel, [QC] bază -- **3p**
d) ΔBQC isoscel, [CQ] bază $\Longrightarrow$ BP înălțime ---**1p**
BP, CA înălțimi $\Longrightarrow$ O este ortocentru ΔBQC --- **3p**
$\Longrightarrow$ CQ $\perp$ BC --- **1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”
Ediția a XVII – a 05.05.2018
Clasa a VI–a Proba echipaj
Barem de corectare

Subiect	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punctaj	10p	10p	10p	10p	10p	10p	10p	10p	10p	10p
Soluția	b	c	c	d	d	c	c	b	c	c

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”
Ediția a XVII – a 05.05.2018
Clasa a VII–a Proba individuală
Barem de corectare

Subiect I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Oficiu
Punctaj	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	10p
Soluția	a	b	c	c	c	a	d	b	c	d	-

Subiect II(problema 1 - 20 p)
1.a) $x^4 - 7x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 9x^2 = (x^2 + 1)^2 - (3x)^2 = (x^2-3x+1)(x^2 + 3x + 1)$ ---------**10p**
b) $E(x) = (x^2-3x+1)(x^2 + 3x + 1)$
E(x) număr prim dacă: **i)** $x^2 - 3x + 1 = 1$ și $x^2 + 3x + 1 =$ nr. prim ------------------------------**2p**
ii) $x^2 + 3x + 1 = 1$ și $x^2 - 3x + 1 =$ nr. prim ------------------------------**2p**
I) $x^2 - 3x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = 3$---**1p**
Dacă $x = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 1$ nu este număr prim ---**1p**
Dacă $x = 3$, $\Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 19$ număr prim ---**1p**
II) $x^2 + 3x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = -3$ ---**1p**
Dacă $x = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 1$ nu este număr prim --**1p**
Dacă $x = -3 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 19$ număr prim --**1p**

Subiect II(problema 2 - 20 p)
a) AC $\perp$BD $\Rightarrow A_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD}{2} \Rightarrow A_{ABCD} = 54\ cm^2$ ---**5p**
b) Fie AC ∩ BD = {O}
ABCD trapez, AB | | CD $\Rightarrow A_{OAD} = A_{OBC}$ ---**1p**
$$\begin{cases} m(\measuredangle AOD) = 90^0 \Rightarrow d(O, AD) = \dfrac{OA\cdot OD}{AD} \Longrightarrow AD = \dfrac{OA\cdot OD}{d(O,AD)} \\ m(\measuredangle BOC) = 90^0 \Rightarrow d(O, BC) = \dfrac{OB\cdot OC}{BC} \Longrightarrow BC = \dfrac{OB\cdot OC}{d(O,BC)} \end{cases}$$ -----------------------------------**3p**

AD < BC ⇒ d(O, AD) > d(O, BC) ---**1p**
c) Fie CF || DB, F ϵ AB ---**1p**
BFCD paralelogram ⇒ BF = DC, DB = CF --**1p**
DB || CF, AC ⊥ BD ⇒ AC ⊥ CF --**1p**
Din ΔACF, m(∡C) = 90^0 ⇒ $AF^2 = AC^2 + CF^2$ --**1p**
CF = DB, AF = AB + CD ⇒ $(AB + CD)^2 = AC^2 + BD^2$ -------------------------------------**1p**
d) Fie M mijlocul lui [AD], N mijlocul lui [BC]
[OM] mediană în ΔOAD, m(∡O) = 90^0 ⇒ OM = $\frac{AD}{2}$ ---**1p**
[ON] mediană în ΔOBC, m(∡O) = 90^0 ⇒ ON = $\frac{BC}{2}$ ---**1p**
[MN] linie mijlocie în ABCD trapez ⇒ MN = $\frac{AB+CD}{2}$ -------------------------------------**1p**
$\begin{cases} Cum\ O \notin MN \Longrightarrow O, M, N\ coliniare \\ Din\ \Delta OMN \Longrightarrow MN < OM + ON \end{cases}$ ---**1p**
⇒ AB + CD < AD + BC ---**1p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”
Ediția a XVII – a 05.05.2018
Clasa a VII–a Proba echipaj
Barem de corectare

Subiect	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Punctaj	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**	**10p**
Soluția	**c**	**d**	**c**	**a**	**c**	**c**	**d**	**b**	**d**	**c**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”
Ediția a XVII – a 05.05.2018
Clasa a VIII–a Proba individuală
Barem de corectare

Subiect I	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Oficiu**
Punctaj	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**10p**
Soluția	**a**	**d**	**b**	**c**	**b**	**c**	**c**	**d**	**d**	**b**	**-**

Subiect II(problema 1 - 20 p)
1.a) f(a) = 10 ⇒ $a^2 - a + b = 9$ ---**2p**
Fie M mijlocu lui [AB] ⇒ M(– 1; 2) --**3p**
M(– 1; 2) ϵ G_f ⇒ f(–1) = 2 ⇒ $-a + b = 0$ ⇒ $a = b$ --**1p**
$a^2 = 9$ ⇒ $a = 3$ sau $a = -3$ --**4p**
$b = 3$ $b = -3$
b) P(1; 6) ϵ G_f ⇒ f(1) = 6 ⇒ $a + b = 6$ --**1p**
$a \cdot b = -a^2 + 6a = 9 - (a - 3)^2$ --**2p**
$a \cdot b$ = max ⇔ $a - 3 = 0$ ⇔ $a = 3$ --**1p**
$a = 3$ ⇒ $b = 3$ ---**1p**
c) Fie C(x, y)
O centrul de greutate G al ΔABC ⇒ $A_{ABC} = A_{OAC} = A_{OBC}$ -----------------------------------**2p**
$A_{OAB} = 4$ (din ΔOAB(m(∡O) = 90^0))---**1p**
$A_{OBC} = \frac{OB \cdot |x|}{2}$ ⇒ $x = 2$ --**1p**
$A_{OAC} = \frac{OB \cdot |y|}{2}$ ⇒ $y = -4$ ---**1p**
Subiect II(problema 2 - 20 p)
a) tg(∡VA; (ABC)) = tg(∡VAO) ⇒ $\frac{VO}{OA} = \sqrt{2}$ ⇒ VO = $6\sqrt{6}$ -----------------------------------**5p**

Din $\Delta VOA \Rightarrow VA = 18$ --**2p**

$VA = AB \Rightarrow VABC$ tetraedru regulat --**2p**

$\Rightarrow d(A, (VBC)) = d(V, (ABC)) = 6\sqrt{6}$ ---**1p**

b) $PA = PB = PC \Rightarrow P \in VO$ ---**1p**

$PA = VP \Rightarrow \Delta PVA$ isoscel $\Rightarrow PN \perp VA$, N mijlocul lui $[VA]$---------------------------------**1p**

$MA = MV = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta MVA$ isoscel $\Rightarrow MN \perp VA$--**1p**

$\Rightarrow$ M, P, N coliniare--**1p**

$\begin{cases} MN = h_M, VO = h_V \Rightarrow P = H_{VAM} \\ \qquad \Longrightarrow AP \perp (VBC) \end{cases}$ ---**1p**

c) Fie S mijlocul lui $[VM] \Rightarrow QS^2 = \frac{2(QV^2+QM^2)-VM^2}{4}$ --------------------------------------**2p**

$QV^2 + QM^2 = \min., VM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = ct. \Rightarrow \begin{cases} QS = min \\ S = fix, Q\ variabil \end{cases} \Rightarrow SQ \perp AB$-------------------**1p**

Aplicând t.3.p $\Rightarrow SQ \perp AB$

$\Delta AQT \sim \Delta AMB \Rightarrow AQ = \frac{5l}{8} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{5}{3}$ --**2p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „PITAGORA”

Ediția a XVII – a 05.05.2018

Clasa a VIII–a Proba echipaj

Barem de corectare

Subiect	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punctaj	10p	10p	10p	10p	10p	10p	10p	10p	10p	10p
Soluția	b	a	d	b	a	c	d	b	c	d