Fie a un număr real pozitiv si funcția $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_a(x)=\begin{cases} ax, & x<0 \\ 0, & x\geq 0 \end{cases}$.

a) Arătați că $f_a\circ f_b=f_{ab}\ \forall a,b\in\mathbb{R}_+^*$

b) Arătați că mulțimea $G=\{f_a \mid a>0\}$ este grup în raport cu compunerea funcțiilor.

([P], pag. 132)

Soluție.

a) Distingem cazurile:

I. $x<0$

Atunci, pentru $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ arbitrare avem:

$(f_a\circ f_b)(x)=f_a(f_b(x))=af_b(x)=a(bx)=(ab)x=f_{ab}(x),\ \forall a,b\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall x\in(-\infty,0)$

II. $x\geq 0$

Atunci, pentru $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ arbitrare avem:

$(f_a\circ f_b)(x)=f_a(f_b(x))=f_a(0)=0=f_{ab}(x),\ \forall a,b\in\mathbb{R}_+^*, \forall x\in[0,\infty)$.

Din I şi II rezultă cerința.

b) Vom verfica axiomele grupului.

Notăm $\mathcal{F}(\mathbb{R})=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$.Se ştie că $(\mathcal{F}(\mathbb{R}),\circ)$ este monoid (legea "$\circ$" reprezintă compunerea funcțiilor. Observăm că, în mod evident, $\varnothing\neq G\subset\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Din punctul a) deducem că $(G,\circ)$ este parte stabilă a monoidului $(\mathcal{F}(\mathbb{R}),\circ)$. Ca urmare, legea indusă de "$\circ$" pe G este asociativă:

(A) : $(f_a\circ f_b)\circ f_c=f_a\circ(f_b\circ f_c),\forall\ f_a,f_b,f_c\in G$ (asociativitate)

Să observăm că $f_a\circ f_1=f_1\circ f_a=f_a,\forall f_a\in G$, deci $f_1\in G$ este elementul neutru al lui G în raport cu legea indusă de "$\circ$" pe G. (Este aceasta o contradicție? Se ştie că monoidul $(\mathcal{F}(\mathbb{R}),\circ)$ are alt element neutru. Explicați!)

Observăm că: $f_a\circ f_{a^{-1}}=f_{a^{-1}}\circ f_a=f_1,\ \forall f_a\in G$, de unde deducem că $f_a'=f_{a^{-1}},\ \forall f_a\in G$ (orice element al lui G este simetrizabil în raport cu legea indusă de "$\circ$" pe G) (Vă rog să observați că elementele simetrizabile ale lui G nu sunt aceleaşi ca ale monoidului $(\mathcal{F}(\mathbb{R}),\circ)$, deoarece

$$U(\mathcal{F}(\mathbb{R}))=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ bijectivă}\}.$$

Este aceasta o contradicție? Explicați!)

OBSERVAȚIE IMPORTANTĂ!

Din analizarea acestui exemplu deducem că formulări de genul : "compunerea funcțiilor este în general asociativă, deci si compunerea funcțiilor pe G este asociativă" sunt greşite !

Sesizați, vă rog, manifestarea *proprieții de ereditate* în acest caz. Legea indusă "moşteneşte" de la legea "mamă" asociativitatea, dar, din cauza **structurii** mulțimii G, ARE ALT ELEMENT NEUTRU şi ALT ELEMENT SIMETRIC.