Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XVIII-a, Turda, 30-31 martie 2018
Matematică
clasa a IV-a

1. Se consideră şirul de numere $1, 5, 9, 10, 14, 18, 19, 23, 27, 28, 32, ...$
a) Să se determine următorii patru termeni ai şirului.
b) Să se determine al 2018 -lea termen al şirului.

Cristian Petru Pop

2. Se consideră numerele naturale nenule a, b, c, cu $a < b < c$ .Pe tablă se scriu cu roşu rezultatul scăderilor $b - a, c - a, c - b$ şi cu verde rezultatul adunărilor $a + b, a + c, b + c$. Din greşeală s-au şters trei numere şi au rămas 34 şi 51 de culoare roşie şi 55 de culoare verde. Aflaţi numerele a, b, c.

Vasile Marc

3. Se consideră n numere naturale consecutive. Suma resturilor împărţirii celor n numere la 8 este 183. Aflaţi numărul n.

***

4. La întâlnirea intergalactică de pe planeta ANIRAT au sosit 14 adulţi şi 25 copii. S-au format 3 grupe: grupa 1 în care fiecare adult este însoţit de un copil, grupa 2 în care fiecare adult este însoţit de doi copii şi grupa 3 în care fiecare adult este însoţit de 3 copii. Se ştie că numărul adulţilor însoţiţi de un singur copil din grupa 1 este mai mare decât 6, iar numărul total al copiilor din grupele 2 şi 3 este mai mare decât 17. Să se afle câţi adulţi şi câţi copii sunt în fiecare grupă.

Observaţie:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
Timp de lucru efectiv 2 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XVIII-a, Turda, 30-31 martie 2018
Matematică
clasa a V-a

1. Determinaţi numerele naturale $\overline{pq}$ ştiind că $\overline{pq}+7=(p+2)\cdot(q+7)$.

Vasile Marc

2. Arătaţi că dacă $n=(\overline{abc})^2=(a+b+c)^5$, atunci

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c+a^2+b^2+c^2)$$

este număr prim.

3. Un număr se numeşte "miraculos" dacă este natural şi este egal cu suma pătratelor a doi divizori distincţi ai săi.

a) Daţi exemplu de număr miraculos;

b) Arătaţi că există cel puţin 2018 numere "miraculoase".

Cristian Petru Pop

4. Se consideră numărul $A=2019^{2018}$. Alcătuim şirul care are primul termen egal cu suma cifrelor lui A, al doilea termen este egal cu suma cifrelor primului termen, al treilea termen este egal cu suma cifrelor celui de-al 2-lea termen şi aşa mai departe. Aflaţi termenii şirului care au o singură cifră.

Vasile Şerdean

Observaţie:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Timp de lucru efectiv 3 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
“Marian Ţarină”
Ediţia a XVIII-a, Turda, 30-31 martie 2018
Matematică
clasa a VI-a

1. Să se determine toate numerele naturale de două cifre de forma $\overline{ab}$ cu proprietăţile:

$$\frac{a+2}{b+1} \in \mathbb{N} \text{ şi } \frac{b+3}{a+1} \in \mathbb{N}.$$

Gheorghe Lobonţ

2. Un elev scrie la calculator de 30 ori numărul $2,2$ şi de 30 ori numărul $2,22$. Din greşeală şterge câteva numere din cele scrise. Aflaţi câte numere a şters ştiind că suma numerelor rămase este $86,34$.

Vasile Şerdean

3. În triunghiul $\triangle ABC$ se cunosc $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $BC = 2AC$. Notăm AN bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $N \in BC$ şi un punct M pe latura AB. Arătaţi că $BM = CN$ dacă şi numai dacă $AC = AM$.

Adrian Bud

4. Fie ABC un triunghi cu $AB < AC$, D piciorul înălţimii din A, M mijlocul lui $[BC]$, şi B' simetricul lui B în raport cu D. Dreapta perpendiculară pe BC în B' intersectează AC în punctul P. Demonstraţi că dacă BP şi AM sunt perpendiculare, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

***

Observaţie:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XVIII-a, Turda, 30-31 martie 2018
Matematică
clasa a VII-a

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi sistemul

$$\begin{cases} a(a+1) < 4b+2c-4 \\ b(b+1) < 4c+2a-4 \\ c(c+1) < 4a+2b-4. \end{cases}$$

Ovidiu Pop

2. Fie numerele raţionale nenule a, b, c astfel încât $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=1$. Arătaţi că

$$\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \in \mathbb{Q}.$$

Adrian Bud

3. Fie triunghiul $ABC, M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$. Dacă $BN \cap MC = \{O\}$, $A_{\triangle AMN} = 24cm^2, A_{\triangle OMN} = 6cm^2$ şi $A_{\triangle OBC} = 20cm^2$, aflaţi aria triunghiului ABC.

4. Fie $ABCD$ dreptunghi cu $m(\sphericalangle DAC) = 75^0$. Construim $\triangle ACE$ echilateral astfel încât E şi B sunt în semiplane diferite faţă de AC. Notăm cu M mijlocul lui EC, $AM \cap CD = \{P\}, BM \cap CD = \{Q\}$ şi $EP \cap DM = \{R\}$. Arătaţi că:

a) $\triangle MDB$ este dreptunghic isoscel;

b) $QR \perp AE$.

Adrian Bud

Observaţie:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XVIII-a, Turda, 30-31 aprilie 2018
Matematică
clasa a VIII-a

1. a) Fie $m, n, p \in \mathbb{R}$ astfel încât $m + n + p = 0$ şi $a, b, c > 0$. Atunci

$$\frac{m^2}{a} + \frac{n^2}{b} + \frac{p^2}{c} \geq \frac{2(m^2 + n^2 + p^2)}{a + b + c}.$$

b) Fie $a, b, c > 0$. Demonstraţi că

$$\frac{a^2 + b^2}{ac} + \frac{b^2 + c^2}{ba} + \frac{c^2 + a^2}{cb} \geq 4\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + 2.$$

Gazeta Matematică

2. Fie p şi q numere prime astfel ca $p^2 + pq + q^2$ este pătrat perfect. Demonstraţi că $p^2 - pq + q^2$ este număr prim.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de centru O şi M un punct în spaţiu. Notăm cu A", B", C", D" simetricele lui M faţă de A', B', C', D'.

a) Să se arate că dreptele AC", BD", CA" şi DB" sunt concurente într-un punct I.

b) Să se arate că punctele M, O şi I sunt coliniare.

Gheorghe Lobonţ

4. În vârfurile A, B, C ale triunghiului oarecare ABC,de aceeşi parte a planului (ABC),se ridică perpendicularele AD, BE, şi CF astfel încât $AD = BC, BE = AC$ şi $CF = AB$. Fie H ortocentrul triunghiului ABC şi O centrul cercului circumscris triunghiului DEF. Arătaţi că :

a) $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2$;

b) $OH \perp (DEF)$.

Vasile Marc

Observaţie:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
“Marian Ţarină”
Ediţia a XVIII-a, Turda, 30-31 martie 2018
Matematică
clasa a IX-a

1. Determinaţi mulţimile finite nevide de numere întregi M, cu proprietatea că pentru orice $x \in M$ avem $x^2 - 2 \cdot 2018x + 2018^2 + 2018 \in M$.

Eugen Jecan

2. Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac relaţia

$$f(x + y^2 - f(y)) = f(x),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

***

3. În triunghiul oarecare ABC se consideră punctele de contact A', B' şi C' ale cercului înscris cu laturile BC, CA şi AB. Fie A'', B'' respectiv C'' mijloacele segmentelor $(B'C')$, $(C'A')$, respectiv $(A'B')$ şi fie
$A'A'' \cap BB'^*\}$, $B'B'' \cap CC'^*\}$, respectiv $C'C'' \cap AA'^*\}$. Notăm cu a, b şi c lungimile segmentelor $(B'C')$, $(C'A')$ şi $(A'B')$.
Să se demonstreze relaţia

$$(b^2 + 2a^2)\overrightarrow{A'^*} + (c^2 + 2b^2)\overrightarrow{B'^*} + (a^2 + 2c^2)\overrightarrow{C'^*} = \overrightarrow{0}.$$

Daniel Văcăreţu

4. Demonstraţi că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea

$$\{n\sqrt{17}\} > \frac{1}{2\sqrt{17}n},$$

unde $\{x\}$ notează partea fracţionară a numărului real x.

***

Observaţie:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XVIII-a, Turda, 30-31 martie 2018
Matematică
clasa a X-a

1. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 2$ are loc inegalitatea

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}C_n^{k-1} \geq 1+2\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}C_{n-1}^{k-1}.$$

Dorel I. Duca

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\sqrt[3]{2018^{\sin 3x}-2018^{3\sin x}}=\sin x.$$

Traian Tămâian

3. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ cu $a_0=1$, ce verifică relaţia

$$\frac{a_0}{n!}+\frac{a_1}{(n-1)!}+...+\frac{a_n}{0!}=2^n a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Aflaţi termenul general al şirului dat.

Adrian Bud

4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe sistemul

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^3+y^3+z^3=1 \\ x^2+2yz=4. \end{cases}$$

Mircea Becheanu

Observaţie:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XVIII-a, Turda, 30-31 martie 2018
Matematică
clasa a XI-a

1. Fie $k,\ m,\ n \in \mathbb{N}^*$ şi matricele $A,\ B \in\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $BA^{2k}B = I_n$. Să se demonstreze că
$$\det\left(A^m BA^k + A^k BA^m + A^{2m} + I_n\right) \geq 0.$$
Traian Tămâian

1. Fie
$$S_n = \sum_{1\leq i<j<k\leq n} a^{i+j+k}.$$
Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} S_n$, pentru $|a| < 1$.
***

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, există $z \in (x, y)$ astfel încât
$$(y - x)f(z) \leq (z - x)f(y) + (y - z)f(x).$$
a) Daţi un exemplu de funcţie neconvexă care are această proprietate.
b) Dacă în plus f este continuă, demonstraţi ca funcţia f este convexă.
Nicolae Bourbăcuţ

1.

2. Pentru matricele $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, considerăm comutatorul lor ca fiind matricea $[X, Y] = XY - YX$. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice care satisfac relaţia $ABC + A + B + C = AB + BC + AC$. Demonstraţi că are loc relaţia
$$[A, BC] = [A, B] + [A, C].$$
Dorin Andrica

1.

Observaţie:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
Timp de lucru efectiv 3 ore.

Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină"
Ediţia a XVIII-a, Turda, 30-31 martie 2018
Matematică
clasa a XII-a

1. Fie a, $b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sqrt[n]{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{n(a+b-x)}}\mathrm{d}x = 2\left(e^b - e^{\frac{a+b}{2}}\right).$$

Traian Tămâian

2. Fie $(G, \cdot)$ şi $(H, *)$ două grupuri şi $f : G \to H$ un morfism de grupuri. Arătaţi că dacă există o funcţie $g : H \to G$ cu proprietatea că imaginea lui g este un subgrup al lui G şi $f(g(a)) = a$ pentru orice $a \in H$, atunci g este şi el un morfism de grupuri.

Vlad Crişan

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care are primitive şi $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale nenule monoton convergent la zero. Dacă pentru orice $n \geq 1$ şi orice $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $f(x) \leq f(x + a_n)$, să se demonstreze că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Mihai Piticari şi Dan Popescu

4. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu unitatea 1. Elementul $x \in A$ are proprietatea (P) dacă există $m, n \in \mathbb{Z}$, pentru care $x^2 = m \cdot x + n \cdot 1$. Inelul $(A, +, \cdot)$ se numeşte *pătratic* dacă orice element al său are proprietatea (P).

1) Demonstraţi următoarele proprietăţi :
Corpul $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ nu este pătratic;
Corpul $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ are elemente a cu $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, care nu au proprietatea (P).

2) Daţi exemplu de inel cu o infinitate de elemente care este pătratic.

Dorin Andrica

Observaţie:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
Timp de lucru efectiv 3 ore.