Olimpiada Naţională
de
MATEMATICĂ

Etapa naţională

3-7 aprilie 2018

SATU MARE

SUBIECTE ŞI BAREME

CUPRINS

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Negreşti Oaş, 4 aprilie 2018
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

Problema 1. Determinaţi numerele prime $a > b > c$ pentru care $a - b$, $b - c$ şi $a - c$ sunt numere prime diferite.

Soluţie. Dacă $a - b$, $b - c$, $a - c$ sunt numere prime diferite, atunci a, b, c nu pot fi toate impare. Rezultă $c = 2$ şi $a - b = 2$. **2p**

Avem $a - b = 2, b - 2 = x, a - 2 = y$, unde x şi y sunt numere prime şi de aici numerele $a = b + 2, x = b - 2$ şi $y = b$ sunt numere prime. **2p**

Numerele prime $b - 2, b, b + 2$ sunt numere impare consecutive, deci unul multiplu de 3, de unde $b - 2 = 3$, pentru care $b = 5$ şi $b + 2 = 7$ sunt prime. **2p**

Deci $a = 7, b = 5, c = 2$ sunt numerele căutate. **1p**

Problema 2. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c pentru care

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{7c+1}{c+1}.$$

Soluţie. Fie $M = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a^2+b^2}{2} = \dfrac{a+b+a^2+b^2}{2} = \dfrac{a(1+a)+b(1+b)}{2} \in \mathbb{N}$, întrucât $a(1+a)$ şi $b(1+b)$ sunt produse de numere naturale consecutive, deci pare. **1p**

Pe de altă parte $M = \dfrac{7c+1}{c+1} = 7 - \dfrac{6}{c+1} \in \mathbb{N}$, deci $\dfrac{6}{c+1} \in \{1, 2, 3, 6\}$.......... **2p**

Dacă $\dfrac{6}{c+1} = 1$, atunci $M = 6$, deci $a(1+a) + b(1+b) = 12$ cu soluţia $a = b = 2$ şi $c = 5$.

Dacă $\dfrac{6}{c+1} = 2$, atunci $M = 5$, deci $a(1+a) + b(1+b) = 10$ fără soluţie.

Dacă $\dfrac{6}{c+1} = 3$, atunci $M = 4$, deci $a(1+a) + b(1+b) = 8$ cu soluţiile $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ şi $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$.

Dacă $\dfrac{6}{c+1} = 6$, atunci $c = 0$ nu convine. **4p**

Problema 3. Pe o tablă sunt scrise numerele: $1, 2, 3, \ldots, 27$. Un *pas* înseamnă ştergerea a trei numere a, b, c de pe tablă şi scrierea în locul lor a numărului $a + b + c + n$, unde n este un număr natural nenul fixat. Determinaţi numărul natural n ştiind că, după 13 paşi, pe tablă este scris numărul n^2.

Soluţie.

Remarcăm mai întâi că după fiecare pas, dispar de pe tablă două numere de fapt, aşadar după 13 paşi dispar 26 de numere, deci rămâne un singur număr. **1p**

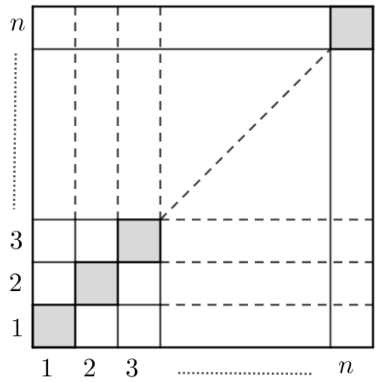
După fiecare pas suma numerelor se măreşte cu n, aşadar după 13 paşi suma de pe tablă (adică numărul rămas pe tablă) este $1 + 2 + \cdots + 27 + 13n = \dfrac{27 \cdot 28}{2} + 13n = 378 + 13n$.......... **3p**

Din $378 + 13n = n^2$ rezultă $378 = n(n - 13)$. Divizorii lui 378 sunt $D_{378} = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 27, 42, 54, 63, 126, 189, 378\}$ dintre care $n = 27$ verifică proprietatea din enunţ. **3p**

Problema 4. Se consideră un număr natural $n \geq 2$ şi un pătrat $n \times n$ (vezi figura alăturată). *Diagonala principală* a acestui pătrat este formată din câmpurile haşurate. Completăm câmpurile aflate sub diagonala principală cu zerouri, iar în restul câmpurilor (inclusiv cele haşurate) scriem numere naturale nenule. După completarea tuturor câmpurilor calculăm suma numerelor aflate pe fiecare linie şi fiecare coloană, obţinând astfel $2n$ sume. Pătratul se numeşte *norocos* dacă valorile celor $2n$ sume sunt egale, într-o anumită ordine, cu numerele $1, 2, \ldots, 2n$.

a) Arătaţi că, pentru $n = 5$, nu există pătrat norocos.

b) Dacă $n = 4$, determinaţi cel mai mare număr natural care apare în completarea unui pătrat norocos.



Soluţie. **a)** Presupunem că există un pătrat norocos 5×5. Suma tuturor sumelor va fi $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$. Suma sumelor pe linii este egală cu suma sumelor pe coloane, deci suma tuturor sumelor este pară. Dar 55 este impar, aşadar nu există pătrat norocos 5×5. .... **3p**

b) Presupunem că un câmp este ocupat de un număr $m \geq 7$, acesta nu poate fi pe prima sau a doua linie sau coloană, alfel suma ar fi cel puţin egală cu $m + 2 \geq 9 > 8$. Iar în restul câmpurilor se află zerouri, deci $m \leq 6$. **2p**

Un pătrat norocos pentru $m = 6$ este în figura alăturată. Deci cel mai mare număr natural care apare în completarea unui pătrat norocos este 6. .... **2p**

1	1	1	3
2	1	1	0
1	6	0	0
1	0	0	0

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Negreşti Oaş, 4 aprilie 2018
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a

Problema 1. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale a şi b care verifică egalitatea

$$a \cdot (a, b) = b + [a, b],$$

unde cu (a, b) am notat cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b şi cu $[a, b]$ am notat cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.

Soluţie. Dacă $(a, b) = d$ şi $[a, b] = m$, atunci $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$ şi $m = a_1 \cdot b_1 \cdot d$, unde $(a_1, b_1) = 1$. **2p**

Deci $a_1 \cdot d \cdot d = b_1 \cdot d + a_1 \cdot b_1 \cdot d$, adică $a_1 \cdot d = b_1 + a_1 \cdot b_1$, ... **2p**

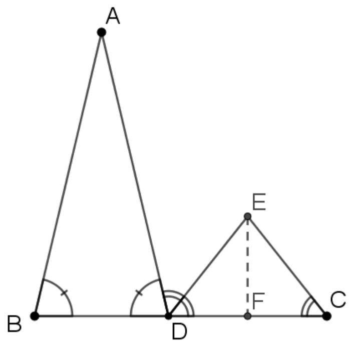
de unde $a_1 | b_1$, dar $(a_1, b_1) = 1$, deci $a_1 = 1$, ... **1p**

deci $d = b_1 + b_1 = 2b_1$, $a = 2b_1$ şi $b = 2b_1^2$ **1p**

Pentru orice număr natural b_1, obţinem o pereche de numere naturale cu proprietatea din enunţ, deci sunt o infinitate de astfel de numere. **1p**

Problema 2. Se consideră segmentele congruente AB, BC şi AD, unde $D \in (BC)$. Arătaţi că mediatoarea segmentului DC, bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ şi dreapta AC sunt concurente.

Soluţie



Fie F mijlocul segmentului DC şi E intersecţia bisectoarei unghiului $\widehat{ADC}$ şi a mediatoarei segmentului DC.

În triunghiul isoscel DEC avem $\widehat{EDC} \equiv \widehat{DCE}$. Pe de altă parte $\widehat{EDC} \equiv \widehat{ADE}$, DE fiind bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$. **2p**

Astfel în triunghiul isoscel ABD avem $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADB}) = 180^\circ - 2 \cdot m(\widehat{ADE})$. **2p**

Deci în triunghiul isoscel ABC măsurile unghiurilor congruente sunt $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = \dfrac{180^\circ - m(\widehat{ABC})}{2} = m(\widehat{ECD})$. **2p**

Deci $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ECD})$, de unde punctele A, E şi C sunt coliniare, adică dreptele din cerinţă sunt concurente. **1p**

Problema 3. Fie numerele naturale $a \neq 0$, $b = 2a + 1000$, $c = a + 1$ şi $d = 2a + 1002$.

a) Arătaţi că $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$.

b) Pentru $a = 9$, determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care $\dfrac{a+n}{b+n} > \dfrac{c+n}{d+n}$.

Soluţie.

a) $\dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a+1}{2a+1002} - \dfrac{a}{2a+1000} = \dfrac{1000}{(2a+1002)(2a+1000)} > 0$ de unde rezultă concluzia. **3p**

b) $\dfrac{a+n}{b+n}-\dfrac{c+n}{b+n}=\dfrac{9+n}{1018+n}-\dfrac{10+n}{1020+n}=\dfrac{n-1000}{(1018+n)(1020+n)}>0$, rezultă $n>1000$, iar cel mai mic număr natural cu această proprietate este $n=1001$. **4p**

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Vom spune că o mulţime A de numere naturale este *completă de mărime n* dacă elementele ei sunt nenule, iar mulţimea tuturor resturilor obţinute la împărţirea unui element din A la un element din A este $\{0,1,2,\ldots,n\}$. De exemplu, mulţimea $\{3,4,5\}$ este o mulţime completă de mărime 4.

Determinaţi numărul minim de elemente ale unei mulţimi complete de mărime 100.

Soluţie. Răspuns: 27.

Un exemplu de mulţime completă de mărime 100 cu 27 de elemente este

$$\{76,77,78,\ldots,100\}\cup\{51,152\}.$$

Într-adevăr, la împărţirile $100:x$, $76\leq x\leq 100$, obţinem resturile $0,1,2,\ldots,24$, la împărţirile $x:51$, $76\leq x\leq 100$, obţinem resturile $25,26,\ldots,49$, la împărţirile $152:x$, $77\leq x\leq 100$, obţinem resturile $52,53,\ldots,75$, la împărţirile $x:152$, $76\leq x\leq 100$, obţinem resturile $76,77,\ldots,100$, la împărţirea $51:152$ obţinem restul 51 şi la împărţirea $152:51$ obţinem restul 50. .... **4p**

Arătăm acum că orice mulţime completă de mărime 100 are cel puţin 27 de elemente.

Observăm că dacă $A=\{a_1<a_2<\ldots<a_n\}$ este o mulţime de tipul cerut, atunci cel mai mare rest care se obţine la împărţirea a două elemente din A este a_{n-1}, obţinut la împărţirea $a_{n-1}:a_n$. Deducem că $a_{n-1}=100$.

Să urmărim acum resturile $\geqslant 50$. Aceste resturi se obţin sigur când împărţim elemente $\geqslant 51$ la elemente mai mari decât ele şi se mai pot obţine doar când împărţim a_n la elemente $\geqslant 51$. Astfel, numărul resturilor $\geqslant 50$ obţinute este cel mult dublul numărului elementelor lui A cuprinse între 51 şi 100. Deoarece numărul resturilor $\geqslant 50$ care trebuie obţinute este 51, rezultă că A trebuie să conţină cel puţin 26 de numere dintre $51,52,53,\ldots,100$. Cum A conţine şi elementul $a_n>100$, reiese că A are cel puţin 27 de elemente. **3p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VII-a

Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule distincte a, b, c, d, care au simultan proprietăţile:
(1) Exact trei din cele patru numere sunt prime;
(2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2018$.

Soluţie. $2018 = \mathcal{M}4 + 2$, două numere sunt pare şi două impare, un număr este 2 .... 1 punct.
$2018 = \mathcal{M}3 + 2$, două numere sunt multipli de 3 şi două $\mathcal{M}3 \pm 1$, un număr este 3 .... 1 punct.
Dacă $a < b < c < d$, atunci $a = 2, b = 3$, $c^2 + d^2 = 2005$, $c = 6k$ sau $d = 6k$ .... 2 puncte.
$k \leq 7$, analiza cazurilor .... 2 puncte.
$k = 3,\ a = 2,\ b = 3\ , c = 18,\ d = 41$ şi permutările lor circulare .... 1 punct.

Problema 2. În pătratul $ABCD$ punctul E este situat pe latura $[AB]$, iar F este piciorul perpendicularei din B pe dreapta DE. Punctul L aparţine dreptei DE astfel încât F este între E şi L, iar $FL = BF$. Dacă N şi P sunt simetricele punctelor A şi F faţă de dreptele DE, respectiv BL, demonstraţi că:
a) Patrulaterul $BFLP$ este pătrat şi patrulaterul $ALND$ este romb.
b) Aria rombului $ALND$ este egală cu diferenţa dintre ariile pătratelor $ABCD$ şi $BFLP$.

Soluţie.

a) $\triangle FLB$ dreptunghic isoscel, $BFLP$ pătrat .... 1 punct.
$m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{BFD}) = 90°$, $AFBD$ patrulater inscriptibil, $m(\widehat{AFB}) = 135°$,
$m(\widehat{AFL}) = 360° - 135° - 90° = 135°$ .... 1 punct.
$\triangle AFL \equiv \triangle AFB$ (LUL), $AL = AB = AD$, $ALND$ romb .... 1 punct.
b) LN intersectează AB şi CD în Q respectiv R, $RQ \perp AB$, $AQRD$ dreptunghi,
$\triangle ALQ \equiv \triangle DNR$ (IC), $A_{ALND} = A_{AQRD}$ .... 1 punct.
$m(\widehat{BFL}) = m(\widehat{LQB}) = 90°$, $BQFL$ patrulater inscriptibil, $m(\widehat{FQB}) = 135°$ 1 punct.
$\triangle AFL \sim \triangle AFB$ (UU), $\frac{AB}{FB} = \frac{BF}{BQ}$, $AB \cdot BQ = BF^2 = BC \cdot BQ$,
$A_{BCRQ} = A_{BFLP}, A_{ALND} = A_{ABCD} - A_{BFLP}$ .... 2 puncte.

Problema 3. Pe laturile $[AB]$ şi $[BC]$ ale paralelogramului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE şi BCF, astfel încât punctele D şi E sunt de aceeaşi parte a dreptei AB, iar F şi D de o parte şi de alta a dreptei BC. Dacă punctele E, D şi F sunt coliniare, atunci demonstraţi că $ABCD$ este romb.

Soluţie. AC şi DF sunt concurente, $AC \cap DF = \{T\}$ .... 1 punct.
<u>Cazul 1</u> $m(\widehat{BAD}) \leq 60°$, ordinea punctelor $E - D - T - F$ sau

$60^\circ < m(\widehat{BAD}) \leq 120^\circ$, ordinea punctelor $D - E - T - F$:
Dacă $D = E$, atunci $ABCD$ romb;
$\triangle ABC \equiv \triangle EBF$ (LUL), $\widehat{BAT} \equiv \widehat{BEF}$ .... 1 punct.
$AETB$ patrulater inscriptibil, $m(\widehat{BTA}) = m(\widehat{ATE}) = 60^\circ$, $[TA$ bisectoarea lui $\widehat{DTB}$, TA este mediatoarea lui $[BD]$, $ABCD$ romb .... 2 puncte.
Cazul 2 $m(\widehat{BAD}) \geq 120^\circ$, ordinea punctelor $D - T - E - F$:
Dacă $T = E$, atunci $ABCD$ romb;
$T \neq E, C \in (AT), \triangle ABC \equiv \triangle EBF$ $(LUL), \widehat{BEF} \equiv \widehat{BAT}, \widehat{BFE} \equiv \widehat{BCA}$ ... 1 punct.
$ATEB$ patrulater inscriptibil, $m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{BTE}) = 60^\circ = m(\widehat{DTC})$,
$[TC$ bisectoarea lui $\widehat{DTB}$, TC este mediatoarea lui $[BD]$, $ABCD$ romb ... 2 puncte.

Problema 4. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{\dfrac{20^n - 18^n}{19}}$ este număr raţional.

Soluţie. $n = 0$ este soluţie .... 1 punct.
pentru $n \geq 1$, $\frac{20^n - 18^n}{19}$ pătrat perfect, $20^n - 18^n = 19x^2$, $2^n(10^n - 9^n) = 19x^2$, x natural nenul; n par, $n = 2m$, m natural nenul .... 1 punct.
$2^{2m}(10^{2m} - 9^{2m}) = 19x^2$, x natural nenul, $x = 2^m y$, y impar, $10^{2m} - 9^{2m} = 19y^2$,
$(10^m - 9^m) \cdot (10^m + 9^m) = 19y^2, (10^m - 9^m, 10^m + 9^m) = 1$ .... 1 punct.
Cazul 1: Există a, b naturale impare, $(a, b) = 1, a \cdot b = y$ cu $10^m + 9^m = 19a^2$ şi
$10^m - 9^m = b^2$; $10^m = 9^m + b^2 = \mathcal{M}4 + 1 + \mathcal{M}4 + 1 = \mathcal{M}4 + 2$,
$m = 1, b = 1, a = 1, y = 1, x = 2, n = 2$ .... 2 puncte.
Cazul 2: Există a, b naturale impare, $(a, b) = 1, a \cdot b = y$ cu $10^m + 9^m = a^2$ şi
$10^m - 9^m = 19b^2$; $10^m = 9^m + 19b^2 = \mathcal{M}8 + 1 + 19(\mathcal{M}8 + 1) = \mathcal{M}8 + 4$,
$m = 2, b = 1, a^2 = 181$, contradicţie
$S = \{0, 2\}$ .... 2 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

CLASA a VIII-a - Soluţii şi barem

Problema 1. Demonstraţi că există o infinitate de mulţimi formate din patru numere naturale nenule care au proprietatea că suma oricăror trei elemente ale mulţimii este pătrat perfect.

Soluţie:
Evident, dacă $\{a, b, c, d\}$ este o mulţime cu proprietatea din enunţ, atunci şi mulţimea $\{n^2a, n^2b, n^2c, n^2d\}$ este, pentru orice număr natural nenul n, o mulţime cu proprietatea dorită, deci este suficient să găsim o asemenea mulţime. **1p**
Cum putem găsi o asemenea mulţime?
Dacă $a+b+c = x^2$, $a+b+d = y^2$, $a+c+d = z^2$, $b+c+d = t^2$, cu $x, y, z, t \in \mathbb{N}$, atunci prin adunare obţinem $3(a + b + c + d) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, de unde $a = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - t^2$, $b = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - z^2$, $c = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - y^2$, $d = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - x^2$. .. **2p**
Pentru ca aceste numere să fie naturale şi nenule, trebuie să alegem x, y, z, t astfel încât $3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ şi $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 > 3 \max\{x^2, y^2, z^2, t^2\}$. Există multe alegeri convenabile pentru x, y, z, t. De exemplu $\{x, y, z, t\} = \{8, 9, 10, 11\}$ conduce la $\{a, b, c, d\} = \{1, 22, 41, 58\}$. **4p**

Notă: Găsirea unei mulţimi cu proprietatea dorită, chiar şi fără a indica modul de găsire a ei va fi punctată cu **6p**.

Problema 2. Fie a, b, c, d numere naturale astfel încât $a + b + c + d = 2018$. Aflaţi valoarea minimă a expresiei

$$E = (a - b)^2 + 2(a - c)^2 + 3(a - d)^2 + 4(b - c)^2 + 5(b - d)^2 + 6(c - d)^2.$$

Soluţie:
Arătăm că minimul căutat este 14.
Această valoare într-adevăr atinsă, de exemplu dacă $a = b = 505$ şi $c = d = 504$. **1p**
Deoarece 2018 nu este divizibil cu 4, numerele a, b, c, d nu pot fi toate egale.
Dacă trei dintre ele sunt egale, atunci trei dintre pătrate sunt 0, iar celelalte trei sunt nenule. În plus, cele patru numere trebuie să aibă aceeaşi paritate, deci celelalte pătrate sunt cel puţin 4. Astfel $E \geq 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 > 14$. **2p**
Dacă două dintre numere sunt egale, iar celelalte două sunt diferite (de acestea două şi diferite între ele), atunci $E \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 > 14$. **1p**
Dacă două dintre numere sunt egale, iar celelalte două sunt şi ele egale, atunci:
$a = b$, $c = d$ implică $E \geq 2 + 3 + 4 + 5 = 14$, $a = c$, $b = d$ implică $E \geq 1 + 3 + 4 + 6 = 14$, iar $a = d$, $b = c$ implică $E \geq 1 + 2 + 5 + 6 = 14$. **2p**
În fine, dacă a, b, c, d sunt diferite două câte două atunci $E \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 > 14$.
.... **1p**

Problema 3. Fie $a, b, c \geq 0$ astfel încât $ab + bc + ca = 3$. Demonstraţi că

$$\frac{a}{a^2+7} + \frac{b}{b^2+7} + \frac{c}{c^2+7} \leq \frac{3}{8}.$$

Soluţie:

Scriem $\dfrac{a}{a^2+7} = \dfrac{a}{a^2+ab+bc+ca+4} = \dfrac{a}{(a+b)(a+c)+4}$. **2p**

Din inegalitatea mediilor, $(a+b)(a+c)+4 \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)\cdot 4} = 4\sqrt{(a+b)(a+c)}$.
.... **2p**

Deoarece $a+b > 0$, $a+c > 0$ ($a+b = 0$ ar implica $a = b = 0$ şi ar contrazice $ab+bc+ca = 3$), putem scrie $\dfrac{a}{a^2+7} \leq \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} = \dfrac{1}{4} \cdot \sqrt{\dfrac{a}{a+b} \cdot \dfrac{a}{a+c}}$.

Aplicând din nou inegalitatea mediilor obţinem $\dfrac{a}{a^2+7} \leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{a}{a+c}\right)$. Analog se obţin relaţiile $\dfrac{b}{b^2+7} \leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{b}{b+c} + \dfrac{b}{b+a}\right)$ şi $\dfrac{c}{c^2+7} \leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{c}{c+a} + \dfrac{c}{c+b}\right)$. **2p**

Prin adunarea acestor trei inegalităţi se obţine inegalitatea din enunţ. **1p**
(Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.)

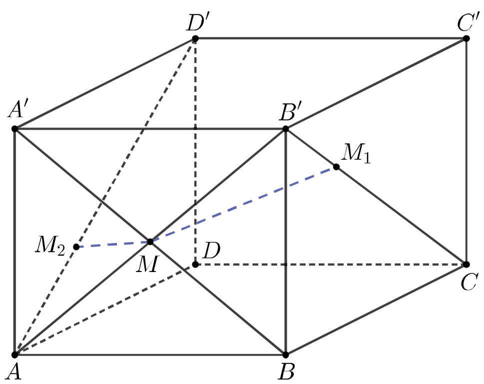
Problema 4. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M centrul feţei $ABB'A'$. Notăm cu M_1 şi M_2 proiecţiile lui M pe dreptele $B'C$ şi respectiv AD'. Demonstraţi că:

a) $[MM_1] \equiv [MM_2]$;

b) dacă $(MM_1M_2) \cap (ABC) = d$, atunci $d \parallel AD$;

c) $m\big(\angle\big((MM_1M_2), (ABC)\big)\big) = 45^\circ \Leftrightarrow \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BB'}{BC} + \dfrac{BC}{BB'}$.

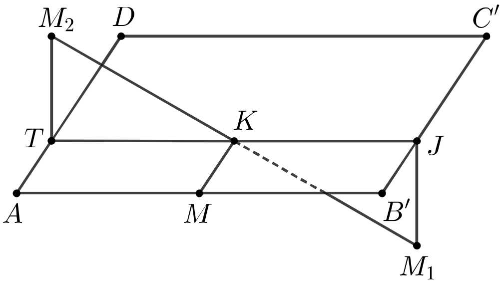
Soluţie:



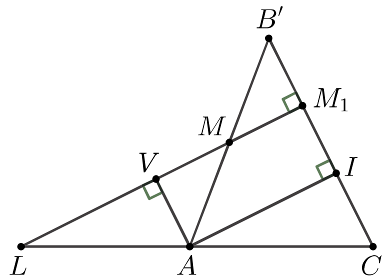
a) Triunghiurile $AB'C$ şi $B'AD'$ sunt congruente (L.L.L.), deci $\angle AB'C \equiv \angle B'AD'$ Cum $[MB'] \equiv [MA]$, $\angle MB'M_1 \equiv \angle MAM_2$ şi $\angle MM_1B' \equiv \angle MM_2A$, triunghiurile MM_2A şi MM_1B' sunt congruente (I.U.) şi de aici $[MM_1] \equiv [MM_2]$. **1p**

b) Construim $M_1J \perp B'C'$, $J \in B'C'$ şi $M_2T \perp AD$, $T \in AD$. Atunci $M_1J \parallel M_2T$

(ambele perpendiculare pe (ABC)). În plus, $B'M_1 = AM_2$ şi $\angle M_1B'J \equiv \angle M_2AT$ implică $\Delta\, M_1B'J \equiv \Delta\, M_2AT$ (I.U.), deci $M_1J = M_2T$. Rezultă că M_1JM_2T este paralelogram. Fie K punctul de intersecţie a diagonalelor sale. Dar $AT = B'J$ 'si $AT \parallel B'J$ implică $ATJB'$ - paralelogram, deci $MK \parallel AT$. Cum $MK \subset (MM_1M_2)$ şi $AT \subset (ABC)$, rezultă că $d \parallel AD$. **3p**



c) Fie $MM_1 \cap AC = \{L\}$ şi $MM_2 \cap (ABC) = \{S\}$. Atunci $AS \parallel BD \parallel B'D'$ deoarece $B'D' \subset (AB'D')$, $B'D' \parallel BD$ şi $BD \subset (ABC)$. Deci $d = LS$. Fie $AV \perp LM_1$. Atunci triunghiurile AVM şi $B'M_1M$ sunt congruente (I.U.), deci $AV = B'M_1 = AM_2$. Din $AV \parallel B'C$ rezultă că $\angle LAV \equiv \angle ACB' \equiv \angle AD'B' \equiv \angle SAM_2$ (alterne interne deoarece $AS \parallel B'D'$). Atunci triunghiurile AVL şi AM_2S sunt congruente (C.U.), deci $AL = AS$. Dacă U este mijlocul lui $[LS]$, cum $AU \perp LS$ şi $AB \perp LS$ rezultă A, B, U coliniare. Planul (MAB) este planul mediator al lui $[LS]$, deci $MU \perp LS$ şi $AU \perp LS$. Cum $MU \subset (MM_1M_2)$ şi $AU \subset (ABC)$, deducem că $m(\angle((MM_1M_2),(ABC))) = m(\angle MUA)$. Atunci $m(\angle MUA) = 45^\circ \Leftrightarrow \frac{BB'}{2} = \frac{AB}{2} + AU \Leftrightarrow BB' - AB = 2AU$. Dacă $BI \perp B'C$, $I \in B'C$, din teorema celor trei perpendiculare rezultă $AI \perp B'C$. În triunghiul $BB'C$ avem $BI = \frac{BB' \cdot BC}{B'C}$, deci $AI^2 = AB^2 + \frac{BC^2 \cdot B'B^2}{BC^2 + B'B^2}$, $CI^2 = AB^2 + BC^2 - AI^2$, adică $CI = \frac{BC^2}{\sqrt{BC^2 + B'B^2}}$. În triunghiul LM_1C, $AI \parallel LM_1$, $M_1I = B'M_1$, deci $\frac{LA}{AC} = \frac{M_1I}{CI} = \frac{B'M_1}{CI}$. Cum $B'M_1 = \frac{B'B^2}{2\sqrt{BC^2 + B'B^2}}$, rezultă $LA = \frac{B'B^2}{2BC^2} \cdot \sqrt{AB^2 + BC^2}$. Deoarece $\Delta\, AUL \sim \Delta\, CDA$ deducem că $\frac{AU}{AL} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + BC^2}}$, deci $AU = \frac{AB \cdot B'B^2}{2BC^2}$. Atunci $m(\angle MUA) = 45^\circ \Leftrightarrow 2AU = \frac{AB \cdot B'B^2}{BC^2} = B'B - AB \Leftrightarrow AB \cdot B'B^2 + AB \cdot BC^2 = BC^2 \cdot B'B \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{BB'}{BC} + \frac{BC}{BB'}$. **3p**



Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

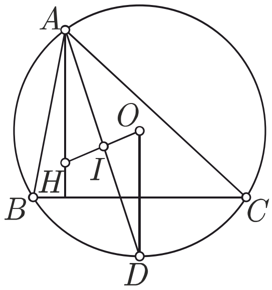
CLASA a IX-a

Problema 1. Arătaţi că dacă într-un triunghi ortocentrul H, centrul de greutate G şi centrul I al cercului înscris sunt coliniare, atunci triunghiul este isoscel.

Soluţie. Dacă triunghiul este echilateral, concluzia este verificată.

Dacă triunghiul este dreptunghic, atunci o bisectoare este şi mediană, deci concluzia este valabilă.

În caz contrar, deoarece G, H şi centrul O al cercului circumscris triunghiului sunt coliniare, deducem că I este pe OH **3p**



Bisectoarea din A trece prin mijlocul D al arcului $\overset{\frown}{BC}$ din cercul circumscris triunghiului, care nu-l conţine pe A. Dacă triunghiul nu este isoscel, O, I şi H sunt distincte, iar $OD \parallel AH$ implică $\frac{AH}{OD} = \frac{HI}{OI}$, de unde $AH = \frac{HI}{OI}R$, unde R este raza cercului circumscris. În mod analog deducem $BH = \frac{HI}{OI}R$, $CH = \frac{HI}{OI}R$, deci H coincide cu O, ceea ce contrazice ipoteza din acest caz **4p**

Problema 2. Demonstraţi că, dacă $a, b, c \geq 0$ şi $a + b + c = 3$, atunci

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}.$$

Soluţie. Eliminând numitorii obţinem inegalitatea echivalentă $a^2c + b^2a + c^2b + \sum a^2 + \sum ab + \sum a \geq 3 + 2\sum a + \sum ab$, adică $a^2c + b^2a + c^2b + \sum a^2 \geq 6$ **2p**

Avem $a^2c \geq 2ac - c$ şi analoagele **3p**

Este deci suficient să arătăm că $\sum a^2 + 2\sum ab - \sum a \geq 6$, adică $(\sum a)^2 - \sum a \geq 6$, ceea ce reiese imediat din ipoteză **2p**

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii de gradul 2 cu proprietatea: pentru orice număr real r, dacă $f(r)$ este număr întreg, atunci şi $g(r)$ este număr întreg.

Demonstraţi că există două numere întregi m şi n astfel încât $g(x) = mf(x) + n$, oricare ar fi numărul real x.

Soluţie. Înlocuind, eventual, f cu $-f$, putem presupune $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, cu $a > 0$. Pentru t întreg, $t \geq \min f$, fie r'_t, r''_t soluţiile ecuaţiei $f(x) = t$. Atunci $g(r'_t) = \frac{\alpha}{a}(t - br'_t - c) + \beta r'_t + \gamma = mt + pr'_t + n$, unde $m = \frac{\alpha}{a}$, $p = \beta - \frac{\alpha b}{a}$, $n = \gamma - \frac{\alpha c}{a}$; analog pentru $g(r''_t)$ **1p**

Numărul $h(t) = |g(r'_t) - g(r''_t)| = |p||r'_t - r''_t| = \frac{|p|}{a}\sqrt{b^2 - 4ac + 4at}$ este întreg pentru orice $t \geq \min f$ şi avem

$$h(t+1) - h(t) = \frac{4|p|}{\sqrt{b^2 - 4ac + 4at} + \sqrt{b^2 - 4ac + 4a(t+1)}}.$$

Dacă $p \neq 0$, pentru t ales astfel încât $b^2 - 4ac + 4at > 4p^2$ obţinem $0 < h(t+1) - h(t) < 1$ şi $h(t+1) - h(t) \in \mathbb{Z}$ – fals. Rezultă $p = 0$, adică $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}$ **3p**

Obţinem astfel $g(r'_t) = mt + n$ pentru orice t întreg, $t \geq \min f$, deci $g(r'_{t+1}) - g(r'_t) = m$ este întreg, adică $\alpha = ma$, cu m întreg **2p**

În sfârşit $\gamma = n + cm$, cu n întreg, deci $g(x) = max^2 + mbx + cm + n = mf(x) + n$, cu m, n numere întregi **1p**

Problema 4. Considerăm un număr natural nenul n, un cerc de lungime $6n$ şi $3n$ puncte care împart cercul în $3n$ arce mici, astfel încât n dintre aceste arce au lungimea 1, alte n dintre aceste arce au lungimea 2, iar cele n arce rămase au lungimea 3.

Arătaţi că printre punctele considerate există două care sunt diametral opuse.

Soluţie. Punctele considerate sunt o parte dintre vârfurile unui poligon cu $6n$ laturi, înscris în cercul dat.

Presupunem contrariul. Atunci capetele fiecărui arc de lungime 1 au ca puncte diametral opuse două puncte situate în interiorul unui arc de lungime 3. Astfel, fiecărui arc de lungime 1 i se asociază un arc ,,diametral opus" de lungime 3 .... **2p**

Fixăm un arc de lungime 1 şi arcul ,,diametral opus" de lungime 3. Capetele lor determină două arce mici $\overset{\frown}{AB}$ şi $\overset{\frown}{CD}$ de lungimi $\frac{1}{2}(6n - 4) = 3n - 2$. Fie p şi q numărul arcelor de lungime 1, respectiv 3, conţinute de $\overset{\frown}{AB}$. Atunci $\overset{\frown}{CD}$ conţine p arce de lungime 3 şi q arce de lungime 1. Fie r numărul arcelor de lungime 2 conţinute de $\overset{\frown}{AB}$. Deoarece $\overset{\frown}{AB}$+ $\overset{\frown}{CD}$ au împreună $n - 1$ arce de lungime 1 şi $n - 1$ arce de lungime 3, obţinem $p + q = n - 1$, de unde $3n - 2 = \overset{\frown}{AB} = p + 3q + 2r = n - 1 + 2(q + r)$, cea ce conduce la $2n - 11 = 2(q + r)$ – imposibil **5p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, 4 aprilie 2018
Clasa a X-a

Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi numerele $a_1, a_2, ..., a_n \in (1, \infty)$. Demonstraţi că funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin relaţia

$$f(x) = (a_1 a_2 ... a_n)^x - a_1^x - a_2^x - ... - a_n^x,$$

pentru orice $x \in [0, \infty)$, este strict crescătoare.

Soluţie şi barem: Vom realiza demonstraţia prin inducţie matematică.

Pentru $n = 2$, fie $a_1, a_2 \in (1, \infty)$. Avem

$$f(x) = (a_1 a_2)^x - a_1^x - a_2^x = (a_1^x - 1)(a_2^x - 1) - 1.$$

Deoarece funcţiile $f_1, f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definite prin relaţiile $f_1(x) = a_1^x - 1$ şi $f_2(x) = a_2^x - 1$, oricare ar fi $x \in [0, \infty)$, sunt strict crescătoare şi pozitive, rezultă că f este strict crescătoare. **3p**

Presupunem proprietatea este adevărată pentru oricare n numere din $(1, \infty)$ şi o demonstrăm pentru $n + 1$ numere $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} \in (1, \infty)$. Avem

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1 a_2 ... a_n a_{n+1})^x - a_1^x - a_2^x - ... - a_n^x - a_{n+1}^x \\ &= \left((a_1 a_2 ... a_n a_{n+1})^x - (a_1 a_2 ... a_n)^x - a_{n+1}^x\right) + \left((a_1 a_2 ... a_n)^x - a_1^x - a_2^x - ... - a_n^x\right). \end{aligned}$$

Funcţia $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = (a_1 a_2 ... a_n a_{n+1})^x - (a_1 a_2 ... a_n)^x - a_{n+1}^x$ este strict crescătoare deoarece $a_1 a_2 ... a_n > 1$ şi $a_{n+1} > 1$ (cazul $n = 2$).

Funcţia $h : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ h(x) = (a_1 a_2 ... a_n)^x - a_1^x - a_2^x - ... - a_n^x$ este strict crescătoare conform ipotezei de inducţie. Atunci $f = g + h$ este strict crescătoare.

Rezultă că proprietatea din enunţ este demonstrată. **4p**

Problema 2. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, 1)$. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor OBC, OAC şi respectiv OAB. Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$.

Soluţie şi barem: Dacă triunghiul ABC este echilateral, avem $AG_1 = BG_2 = CG_3 = \frac{4}{3}$, de unde obţinem $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$. **1p**

Reciproc, considerăm planul complex ABC cu originea în O. Notăm cu p afixul unui punct P din planul complex considerat. Avem $g_1 = \frac{b+c}{3}, g_2 = \frac{c+a}{3}$ şi $g_3 = \frac{a+b}{3}$. **1p**

Egalitatea $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$ este echivalentă cu $\sum \left| a - \frac{b+c}{3} \right| = 4$, sau $\sum |3a - b - c| = 12$. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Deoarece $h = a + b + c$, conform teoremei lui Sylvester, egalitatea precedentă este echivalentă cu $\sum |4a - h| = 12$. **2p**

Atunci

$$\begin{aligned} 144 &= \left(\sum |4a-h|\right)^2 \le 3\sum |4a-h|^2 = 3\sum \left(16|a|^2 - 4a\overline{h} - 4\overline{a}h + |h|^2\right) \\ &= 144 - 12\overline{h}\sum a - 12h\sum \overline{a} + 3|h|^2 = 144 - 21|h|^2 . \end{aligned}$$

Obţinem $|h|^2 \le 0$, deci $|h| = 0$. Rezultă $O = H$, deci triunghiul ABC este echilateral. **3p**

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge 2$. Demonstraţi că, pentru orice numere complexe $a_1, a_2, ..., a_n$ şi $b_1, b_2, ..., b_n$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} |z-a_k|^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n} |z-b_k|^2$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2$.

Soluţie şi barem: *b)* $\Rightarrow$ *a)* Avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |z-a_k|^2 &= n|z|^2 - z\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k - \overline{z}\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 \\ &\le n|z|^2 - z\sum_{k=1}^{n}\overline{b}_k - \overline{z}\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n}|b_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n}|z-b_k|^2 , \end{aligned}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$. **1p**

a) $\Rightarrow$ *b)* Alegând $z = 0$, obţinem $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2$. **1p**

Notăm $a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ şi $b = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Presupunem, prin reducere la absurd, că $a \ne b$. Fie $z = (1-t)a + tb$, unde $t \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |z-a_k|^2 &= n|z|^2 - z\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k - \overline{z}\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 \\ &= (n-1)|z|^2 + |z|^2 - z\overline{a} - \overline{z}a + |a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 - |a|^2\right) \\ &= (n-1)|z|^2 + |z-a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 - |a|^2\right) \\ &= (n-1)|z|^2 + t^2|b-a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 - |a|^2\right). \end{aligned}$$

Analog avem $\sum\limits_{k=1}^{n} |z-b_k|^2 = (n-1)|z|^2 + (1-t)^2|b-a|^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2 - |b|^2\right)$. **2p**

Atunci

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} |z-a_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |z-b_k|^2 \\ &= 2t|b-a|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 - |a|^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2 - |b|^2\right) - |b-a|^2 . \end{aligned}$$

Pentru

$$t > \frac{|b-a|^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2 - |b|^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 - |a|^2\right)}{2\,|b-a|^2},$$

este contrazisă ipoteza. Atunci $a = b$. **3p**

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 2$. Pentru numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n$, notăm $S_0 = 1$ şi

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k},$$

suma tuturor produselor de câte k numere alese dintre $a_1, a_2, ..., a_n$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Determinaţi numărul n-uplurilorr $(a_1, a_2, ..., a_n)$ pentru care are loc relaţia:

$$(S_n - S_{n-2} + S_{n-4} - ...)^2 + (S_{n-1} - S_{n-3} + S_{n-5} - ...)^2 = 2^n S_n.$$

Soluţie şi barem: Are loc identitatea

$$\prod_{k=1}^{n} (a_k + i) = (S_n - S_{n-2} + S_{n-4} - \cdots) + i(S_{n-1} - S_{n-3} + S_{n-4} - \cdots).$$

.... **1p**

Rezultă

$$\begin{aligned} &(S_n - S_{n-2} + S_{n-4} - \cdots)^2 + (S_{n-1} - S_{n-3} + S_{n-4} - \cdots)^2 \\ = &\left|\prod_{k=1}^{n} (a_k + i)\right|^2 = \prod_{k=1}^{n} |\ a_k + i|^2 = \prod_{k=1}^{n} \left(\ a_k^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Relaţia din enunţ este echivalentă cu

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\ a_k^2 + 1\right) = 2^n a_1 a_2 \cdots a_n.$$

.... **2p**

Din inegalităţile $a_k^2 + 1 \geq 2\,|a_k|$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, rezultă că egalitatea în relaţia din enunţ are loc dacă şi numai dacă $|a_1| = |a_2| = \cdots = |a_n| = 1$, iar numărul de valori egale cu -1 este par. **2p**

Prin urmare, numărul n-uplelor $(a_1, a_2, ..., a_n)$ pentru care are loc relaţia din enunţ este

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = 2^{n-1}.$$

.... **2p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, 4 aprilie 2018

CLASA a XI-a

Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Pentru orice număr natural nenul n şi orice matrice coloană

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z}),$$

notăm cu $\delta(\mathbf{X})$ cel mai mare divizor comun al numerelor x_1, x_2, ..., x_n. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Arătaţi că următoarele două afirmaţii sunt echivalente:

(a) $|\det \mathbf{A}| = 1$ şi

(b) $\delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{X})$, oricare ar fi $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$.

(Cel mai mare divizor comun al unor numere întregi este număr natural.)

Soluţie. Arătăm că **(a)** implică **(b)**. Fie $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, fie $\mathbf{X} = (x_j) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ şi fie $\mathbf{BX} = (y_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. Cum $y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, rezultă că $\delta(\mathbf{X})$ divide fiecare y_i, deci $\delta(\mathbf{X}) \leq \delta(\mathbf{BX})$. **2p**

Cum $\mathbf{A}$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, rezultă că $\delta(\mathbf{X}) \leq \delta(\mathbf{AX}) \leq \delta(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX})) = \delta(\mathbf{X})$, oricare ar fi $\mathbf{X}$ din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. **1p**

Arătăm că **(b)** implică **(a)**. Fie $d = \det \mathbf{A}$. Dacă $d = 0$, atunci sistemul omogen $\mathbf{AX} = \mathbf{O}_{n,1}$ are soluţii nenule în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Q})$ şi, prin înmulţirea uneia dintre aceste soluţii cu produsul numitorilor componentelor sale nenule, obţinem un $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$, $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}_{n,1}$, astfel încât $\mathbf{AX} = \mathbf{O}_{n,1}$. Deci $0 < \delta(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{O}_{n,1}) = 0$, o contradicţie. Prin urmare, $d \neq 0$. **1p**

Fie $\mathbf{X}_i$ coloana i a matricei $\mathbf{A}^*$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Cum matricea coloană $\mathbf{AX}_i$ are toate componentele nule, cu excepţia componentei i, care este egală cu d, rezultă că $d = \delta(\mathbf{AX}_i) = \delta(\mathbf{X}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, deci toate elementele lui $\mathbf{A}^*$ sunt divizibile cu d. Prin urmare, $\det \mathbf{A}^*$ este divizibil cu d^n. Cum $\det \mathbf{A}^* = d^{n-1}$ şi $d \neq 0$, rezultă că $d = \pm 1$.
.... **3p**

Remarcă. O matrice pătrată cu elemente întregi şi determinant ± 1 se numeşte *unimodulară*. Evident, produsul a două matrice unimodulare este unimodular şi orice matrice unimodulară este inversabilă, iar inversa ei este şi ea unimodulară. Prima parte a soluţiei 1 arată că singura dificultate constă în a deduce unimodularitatea lui $\mathbf{A}$ din condiţia $\delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{X})$, oricare ar fi $\mathbf{X}$ din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$.

Conform unei teoreme a lui Frobenius, pentru orice matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, există un număr natural $r \leq \min(m, n)$ şi două matrice unimodulare $\mathbf{P}$ şi $\mathbf{Q}$, astfel încât $\mathbf{PAQ} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)$, unde toţi d_i sunt numere naturale şi fiecare d_i îl divide pe d_{i+1}.

Fie $m = n$ şi fie $\delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{X})$ oricare ar fi $\mathbf{X}$ în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. Unimodularitatea lui $\mathbf{Q}$ implică $\delta(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{QX})$; prin ipoteză, $\delta(\mathbf{QX}) = \delta(\mathbf{AQX})$, iar unimodularitatea lui

$\mathbf{P}$ implică $\delta(\mathbf{AQX}) = \delta(\mathbf{PAQX})$. Deci $\delta(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{PAQX})$, oricare ar fi $\mathbf{X}$ în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. Întrucât $\mathbf{PAQ}$ are forma diagonală de mai sus, rezultă că $r = n$ şi toţi $d_i = 1$, deci $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}$ este unimodulară.

Problema 2. Arătaţi că $2^{-x} + 2^{-1/x} \leq 1$, oricare ar fi numărul real $x > 0$.

Soluţie. Fie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x} + 2^{-1/x}$. Cum $f(x) = f(1/x)$, este suficient să arătăm că $f(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \in (0,1]$. **1p**

Cum f este derivabilă şi $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(1)$, pentru a demonstra inegalitatea din enunţ, este suficient să arătăm că valoarea lui f în orice zero al derivatei f' din $(0,1)$ este cel mult 1. .... **2p**

Fie $a \in (0,1)$, astfel încât $f'(a) = 0$. Rezultă că $2^{-1/a}/a^2 = 2^{-a}$, deci $2^{-1/a} = 2^{-a}a^2$. Cum $f(a) = 2^{-a}+2^{-1/a} = 2^{-a}(1+a^2)$, inegalitatea $f(a) \leq 1$ este echivalentă cu $1 \leq 2^a - a^2$. **2p**

Fie $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2^x - x^2$. Cum g este de două ori derivabilă şi $g''(x) = 2^x(\ln 2)^2 - 2 \leq 2\left((\ln 2)^2 - 1\right) \leq 0$, oricare ar fi x în $[0,1]$, rezultă că g este concavă, deci $g(x) = g((1-x)\cdot 0 + x \cdot 1) \geq (1-x)g(0) + xg(1) = 1$. **2p**

Problema 3. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care are proprietatea lui Darboux. Arătaţi că, dacă f este injectivă pe mulţimea numerelor iraţionale, atunci este f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Vom arăta că f este injectivă pe $\mathbb{R}$. Atunci, cum f are proprietatea lui Darboux, f este (strict) monotonă şi, prin urmare, continuă. **1p**

Presupunem că f nu este injectivă. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $f(a) = f(b)$. Cum în intervalul (a,b) există cel puţin două numere iraţionale, iar f este injectivă pe mulţimea numerelor iraţionale, există $c \in (a,b)$, astfel încât $f(c) \neq f(a)$. Fără să restrângem generalitatea, putem presupune că $f(c) > f(a)$.

Fie $A = (a,b) \cap \mathbb{Q}$. Cum A este numărabilă, rezultă că $f(A)$ este cel mult numărabilă, şi cum $(f(a), f(c))$ este nenumărabilă, rezultă că $(f(a), f(c)) \setminus f(A)$ este nevidă. ... **4p**

Fie $d \in (f(a), f(c)) \setminus f(A)$. Cum f are proprietatea lui Darboux, există $x_1 \in (a,c)$ şi $x_2 \in (c,b)$, astfel încât $f(x_1) = d = f(x_2)$. Din alegerea lui d, rezultă că x_1 şi x_2 sunt iraţionale, ceea ce contrazice injectivitatea lui f pe mulţimea numerelor iraţionale. .. **2p**

Problema 4. Fie n un număr întreg, $n \geq 2$, şi fie $\mathbf{A}$ o matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^2$ să aibă ranguri diferite. Arătaţi că există o matrice nenulă $\mathbf{B}$ în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$.

Soluţie. Întrucât $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^2$ au ranguri diferite, $\mathbf{A}$ este o matrice singulară nenulă.

Dacă $n = 2$, atunci $\mathbf{A}^2 = (\mathrm{tr}\mathbf{A})\mathbf{A}$, conform teoremei Hamilton-Cayley. Deoarece $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^2$ au ranguri diferite, rezultă că $\mathrm{tr}\mathbf{A} = 0$, deci $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}_2$ şi putem lua $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. **1p**

Fie $n \geq 3$. Întrucât $\mathbf{A}$ este singulară, 0 este o valoare proprie a lui $\mathbf{A}$.

Dacă toate valorile proprii ale lui $\mathbf{A}$ sunt nule, atunci $\mathbf{A}$ este nilpotentă, şi putem lua $\mathbf{B} = \mathbf{A}^k$, unde k este cel mai mare număr întreg pentru care A^k este nenulă. **1p**

Dacă $\mathbf{A}$ are şi valori proprii nenule, fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, unde $1 \leq m \leq n-1$, valorile sale proprii nenule (nu neapărat distincte) şi fie

$$f = X \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i) = X^{m+1} + a_m X^m + \cdots + a_1 X,$$

unde $a_1 = (-1)^m \lambda_1 \cdots \lambda_m \neq 0$. Atunci $f(\mathbf{A}) \neq \mathbf{O}_n$, deoarece, în caz contrar, $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang}(-a_1\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(a_2\mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{m+1}) \leq \operatorname{rang} \mathbf{A}^2 < \operatorname{rang} \mathbf{A}$, contradicţie. **2p**

Fie $f_{\mathbf{A}}$ polinomul caracteristic al lui $\mathbf{A}$. Conform teoremei Hamilton-Cayley, $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}_n$. Cum f este un factor al lui $f_{\mathbf{A}}$ şi $f(\mathbf{A}) \neq \mathbf{O}_n$, rezultă că $n = \deg f_{\mathbf{A}} > \deg f = m+1$.

Deci $\mathbf{A} \prod_{i=1}^{m}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n) = f(\mathbf{A}) \neq \mathbf{O}_n$ şi $\mathbf{A}^{n-m} \prod_{i=1}^{m}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n) = f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}_n$. Prin urmare, există un număr natural nenul $k < n - m$, astfel încât $\mathbf{A}^k \prod_{i=1}^{m}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n) \neq \mathbf{O}_n$ şi $\mathbf{A}^{k+1} \prod_{i=1}^{m}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n) = \mathbf{O}_n$. Evident, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^k \prod_{i=1}^{m}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)$ îndeplineşte condiţiile cerute în enunţul problemei. **3p**

Remarcă. Întrucât $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^2$ au ranguri diferite, există o celulă Jordan de dimensiune cel puţin 2 corespunzătoare valorii proprii 0. Prin urmare, polinomul minimal g al lui $\mathbf{A}$ are în 0 o rădăcină de multiplicitate cel puţin 2, deci $g = X^{k+1}h$, unde k este un număr natural nenul, iar h este un polinom care nu se anulează în 0. Atunci $\mathbf{B} = \mathbf{A}^k h(\mathbf{A})$ este nenulă şi $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$.

Fie $n \geq 3$. Dacă $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^2$ au acelaşi rang, existenţa unei matrice nenule $\mathbf{B}$, astfel încât $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$, este condiţionată de multiplicitatea valorii proprii 0 în polinomul caracteristic al lui $\mathbf{A}$.

De exemplu, dacă $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, unde $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sunt numere complexe nenule, distincte două câte două, atunci $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^2$ au rangul $n-1$. În acest caz, polinomul caracteristic al lui $\mathbf{A}$ are o rădăcină simplă în 0. Întrucât singurele matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, care comută cu $\mathbf{A}$, sunt cele diagonale, rezultă că nu există matrice nenule $\mathbf{B}$ în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$.

Pe de altă parte,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_{2,n-2} \\ \mathbf{O}_{n-2,2} & \mathbf{I}_{n-2} \end{pmatrix}$$

este o matrice idempotentă, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, de rang $n-2$ şi orice matrice $\mathbf{B} = (b_{ij})$ din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, al cărei unic element nenul este b_{12}, satisface condiţia $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$. În acest caz, polinomul caracteristic al lui $\mathbf{A}$ are o rădăcină dublă în 0.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

CLASA a XII-a - Soluţii şi barem

1. *Fie A un inel finit şi $a, b \in A$ cu proprietatea că $(ab-1)b = 0$. Arătaţi că $b(ab-1) = 0$.*
Soluţie:
Egalitatea din ipoteză este echivalentă cu $ab^2 = b$, iar cea de demonstrat cu $bab = b$.
Dacă elementul b este idempotent(i.e., $b^2 = b$), atunci $bab = bab^2 = b \cdot b = b^2 = b$.
Dacă $b^m = b$, cu $m > 2$, atunci $bab = bab^m = bab^2b^{m-2} = b \cdot b \cdot b^{m-2} = b^m = b$.
.... **2p**
Este suficient să arătăm că există $m \geq 2$ cu proprietatea că $b^m = b$. **1p**
Inelul A fiind finit, există $1 \leq k < m$ numere naturale, cu k minim, cu proprietatea că $b^k = b^m$. **1p**
Arătăm că $k = 1$.
Dacă $k > 1$, atunci $ab^k = ab^m = ab^2b^{m-2} = b^{m-1}$. **1p**
Dacă $k = 2$, rezultă că $b = ab^2 = b^{m-1}$, contrazicând minimalitatea. **1p**
Dacă $k > 2$, atunci $b^{k-1} = b \cdot b^{k-2} = ab^2b^{k-2} = ab^k = b^{m-1}$, contrazicând de asemenea minimalitatea. **1p**
Observaţie: Nu se acordă puncte pentru discutarea cazului unui inel comutativ.

2. *Fie $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisfac condiţia*

$$e^{f(x)} + f(x) \geq x + 1\,,$$

pentru orice x număr real. Determinaţi valoarea minimă pe care o poate lua integrala

$$I(f) = \int_0^e f(x)\,dx\,,$$

atunci când f parcurge $\mathcal{F}$.

Soluţie:
Vom arăta că valoarea minimă este $\frac{3}{2}$.
Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + x - 1$.
Aceasta este strict crescătoare şi continuă, cu $Im(g) = \mathbb{R}$, deci inversabilă,. **1p**
cu inversa de asemenea continuă şi strict crescătoare. **1p**
Inegalitatea din enunţ se scrie sub forma $g(f(x)) \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde

$f(x) \geq g^{-1}(x), \forall x \in \mathbb{R}$. **1p**
Cum $g^{-1} \in \mathcal{F}$, şi $I(f) \geq I\left(g^{-1}\right), \forall f \in \mathcal{F}$, valoarea minimă este $I\left(g^{-1}\right)$. **2p**
Cu substituţia $t = g^{-1}(x)$, avem

$$I\left(g^{-1}\right) = \int_0^e g^{-1}(x)\,dx = \int_0^1 tg'(t)\,dt = \left((t-1)e^t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

.... **2p**
Observaţie: Ultimul calcul reface demonstraţia teoremei lui Young, care se poate de asemenea invoca pentru obţinerea concluziei.

3. *Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*
a) Dacă $A = \{m \cdot a_n | \, m, n \in \mathbb{N}^*\}$, arătaţi că orice interval deschis de numere strict pozitive conţine elemente din A.
b) Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $x, y \in [a,b]$ cu $|x-y| = a_n$ are loc inegalitatea $\left|\int\limits_x^y f(t)\,dt\right| \leq |x-y|$, arătaţi că:

$$\left|\int\limits_x^y f(t)\,dt\right| \leq |x-y|, \quad \forall x, y \in [a,b].$$

Soluţie:
a) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pentru orice $c, d > 0$, cu $c < d$, există $n \in \mathbb{N}^*$ cu $a_n < d - c$. Pentru $m = \lfloor \frac{c}{a_n} \rfloor + 1$ rezultă atunci că $m \cdot a_n \in (c,d) \cap A$. **1p**
b) Funcţia f fiind integrabilă, este marginită. Fie $M > 0$, cu $Im(f) \subseteq [-M, M]$.
Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ fixate şi $x, y \in [a,b]$ cu $|x-y| = m \cdot a_n$. Arătăm că

$$\left|\int\limits_x^y f(t)\,dt\right| \leq |x-y|.$$

Definim, pentru $k = \overline{0,m}$, numerele $z_k \in [a,b]$ prin

$$z_k = x + \frac{k}{m} \cdot (y-x) = \left(1 - \frac{k}{m}\right) \cdot x + \frac{k}{m} \cdot y.$$

Rezultă că $|z_k - z_{k-1}| = a_n$, pentru orice $k = \overline{1, m}$, şi

$$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_{z_0}^{z_m} f(t)\,dt\right| = \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(t)\,dt\right| \le \sum_{k=1}^{m}\left|\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(t)\,dt\right| \le \sum_{k=1}^{m}|z_k - z_{k-1}| = |x-y|.$$

.... **2p**

Fie acum $x, y \in [a, b]$ oarecare şi $d = |x - y|$. Pentru $d = 0$, inegalitatea cerută este evidentă. Presupunem în continuare $d > 0$. Cum A este densă în $[0, \infty)$, există un şir $(d_n)_{n\ge1} \subset A$ cu proprietatea că $d_n \nearrow d$. Considerăm

$$y_n = x + \frac{d_n}{d}\cdot(y-x) = \left(1 - \frac{d_n}{d}\right)\cdot x + \frac{d_n}{d}\cdot y.$$

Atunci $y_n \in [a, b]$, $|y_n - x| \in A$ şi $y_n \to y$. **2p**

Rezultă că

$$\left|\int_{y_n}^{y} f(t)\,dt\right| \le M\cdot|y - y_n| \longrightarrow 0.$$

.... **1p**

Obţinem atunci că

$$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^{y_n} f(t)\,dt + \int_{y_n}^{y} f(t)\,dt\right| \le \left|\int_x^{y_n} f(t)\,dt\right| + \left|\int_{y_n}^{y} f(t)\,dt\right| \le |x-y_n| + \left|\int_{y_n}^{y} f(t)\,dt\right|.$$

Trecând la limită în ultima inegalitate, obţinem inegalitatea cerută.

.... **1p**

4. *Pentru $k \in \mathbb{Z}$ definim polinomul $F_k = X^4 + 2(1-k)X^2 + (1+k)^2$. Să se determine toate valorile $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât F_k să fie ireductibil peste $\mathbb{Z}$ şi reductibil peste $\mathbb{Z}_p$ pentru orice p prim.*

Soluţie:

Vom arăta că numerele care satisfac condiţia cerută sunt toate numerele $k \in \mathbb{Z}$ care nu sunt de forma $\pm l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$.

Arătăm că F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă F_k se descompune ca produs de două polinoame monice de grad 2.

Într-adevăr, dacă F_k are o rădăcină întreagă m, atunci

a) dacă $m = 0$, atunci $k = -1$, şi $F_{-1} = X^2(X^2 + 4)$.

b) dacă $m \neq 0$, atunci $-m$ este de asemenea rădăcină, şi $X^2 - m^2$ divide F_k.

. . . . **1p**

Deci F_k este reductibil peste Z dacă şi numai dacă $F_k = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Prin identificarea coeficienţilor, avem că $a + c = 0$, $ac + b + d = 2(1 - k)$, $ad + bc = 0$ şi $bd = (1 + k)^2$.

Dacă $a = 0$, atunci $c = 0$, $b + d = 2(1 - k)$, $bd = (1 + k)^2$, de unde obţinem $(b - d)^2 = 4(1 - k)^2 - 4(1 + k)^2 = -16k$, astfel că $k = -l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$.

Dacă $a \neq 0$, atunci $c = -a$, $b = d$, $b^2 = (1 + k)^2$, $2b - a^2 = 2(1 - k)$.

Dacă $b = -1 - k$, rezultă $a^2 = -4$, imposibil. Deci $b = 1 + k$ şi $a^2 = 4k$, de unde $k = l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$.

Prin urmare, F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $k = \pm l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$. **2p**

Arătăm că F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$ cu p prim, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

Pentru $p = 2$ avem că $F_k = X^4$ sau $F_k = X^4 + \hat{1} = (X + \hat{1})^4$, deci F_k este reductibil. . **1p**

Fie p număr prim impar. Putem presupune că $k \not\equiv 0 \pmod{p}$ şi $k \not\equiv -1 \pmod{p}$.

Ca mai sus, F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$ dacă şi numai dacă $F_k = (X^2+\hat{a}X+\hat{b})(X^2+\hat{c}X+\hat{d})$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, care verifică condiţiile $a + c \equiv 0 \pmod{p}$, $ac + b + d \equiv 2(1 - k) \pmod{p}$, $ad + bc \equiv 0 \pmod{p}$ şi $bd \equiv (1 + k)^2 \pmod{p}$.

Dacă $a \equiv 0 \pmod{p}$, avem că $c \equiv 0 \pmod{p}$ şi $(b - d)^2 \equiv -16k \pmod{p}$.**(1)**

Dacă $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, atunci $c \equiv -a \pmod{p}$, $b \equiv d \pmod{p}$, $b^2 \equiv (1 + k)^2 \pmod{p}$ şi $2b - a^2 \equiv 2(1 - k) \pmod{p}$.

Pentru $b \equiv -1 - k \pmod{p}$ avem că $a^2 \equiv -4 \pmod{p}$.**(2)**

Pentru $b \equiv 1 + k \pmod{p}$ avem că $a^2 \equiv 4k \pmod{p}$.**(3)**

. . . . **1p**

Cum $-16k = -4 \cdot 4k$, cel puţin unul dintre elementele $-\widehat{16k}$, $-\hat{4}$ şi $\widehat{4k}$ este rest pătratic modulo p, astfel că cel puţin una dintre ecuaţiile (1), (2) sau (3) are soluţii. **1p**

Cum $F_k = (X^2+(1-k))^2-(-16k) = (X^2-(1+k))^2-(-4)X^2 = (X^2+(1+k))-(4k)X^2$, rezultă că F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$. **1p**