MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SATU MARE
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Negreşti Oaş, 4 aprilie 2018
CLASA a VI-a

Problema 1. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale a şi b care verifică egalitatea

$$a \cdot (a, b) = b + [a, b],$$

unde cu (a, b) am notat cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b şi cu $[a, b]$ am notat cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.

Problema 2. Se consideră segmentele congruente AB, BC şi AD, unde $D \in (BC)$. Arătaţi că mediatoarea segmentului DC, bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ şi dreapta AC sunt concurente.

Problema 3. Fie numerele naturale $a \neq 0$, $b = 2a+1000$, $c = a+1$ şi $d = 2a+1002$.
a) Arătaţi că $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$.
b) Pentru $a = 9$, determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care $\dfrac{a+n}{b+n} > \dfrac{c+n}{d+n}$.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Vom spune că o mulţime A de numere naturale este *completă de mărime n* dacă elementele ei sunt nenule, iar mulţimea tuturor resturilor obţinute la împărţirea unui element din A la un element din A este $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. De exemplu, mulţimea $\{3, 4, 5\}$ este o mulţime completă de mărime 4.

Determinaţi numărul minim de elemente ale unei mulţimi complete de mărime 100.

Timp de lucru 2 ore. Se acordă suplimentar 30 minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SATU MARE
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Matematika tantárgyverseny

Országos szakasz, Avasfelsőfalu, 2018. április 4.

VI. OSZTÁLY

1. feladat. Igazold, hogy végtelen sok olyan a és b természetes szám van, amelyekre

$$a \cdot (a, b) = b + [a, b],$$

ahol (a, b) az a és b számok legnagyobb közös osztóját és $[a, b]$ az a és b számok legkisebb közös többszörösét jelöli.

2. feladat. Adottak az AB, BC és AD kongruens szakaszok, ahol $D \in (BC)$. Igazold, hogy a DC szakasz felezőmerőlegese, az $\widehat{ADC}$ szög szögfelezője és az AC egyenes összefutóak!

3. feladat. Adottak az $a \neq 0$, $b = 2a + 1000$, $c = a + 1$ és $d = 2a + 1002$ természetes számok.
a) Igazold, hogy $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$.
b) Ha $a = 9$, határozd meg a legkisebb olyan n természetes számot, amelyre

$$\frac{a+n}{b+n} > \frac{c+n}{d+n}.$$

4. feladat. Legyen n egy nem nulla természetes szám. Azt mondjuk, hogy egy A halmaz egy n *méretű teljes halmaz*, ha elemei nem nullák, és ha az A halmaz minden elemét elosztjuk az A halmaz minden elemével, akkor az így kapott maradékok halmaza $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Például a $\{3, 4, 5\}$ halmaz egy 4 méretű teljes halmaz.
Legkevesebb hány eleme lehet egy 100 méretű teljes halmaznak?

Munkaidő 2 óra + 30 perc kérdésekre.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Negreşti Oaş, 4 aprilie 2018
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a

Problema 1. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale a şi b care verifică egalitatea

$$a \cdot (a, b) = b + [a, b],$$

unde cu (a, b) am notat cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b şi cu $[a, b]$ am notat cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.

Soluţie. Dacă $(a, b) = d$ şi $[a, b] = m$, atunci $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$ şi $m = a_1 \cdot b_1 \cdot d$, unde $(a_1, b_1) = 1$. **2p**

Deci $a_1 \cdot d \cdot d = b_1 \cdot d + a_1 \cdot b_1 \cdot d$, adică $a_1 \cdot d = b_1 + a_1 \cdot b_1$, ... **2p**

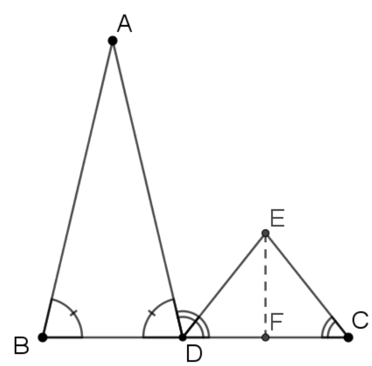
de unde $a_1 | b_1$, dar $(a_1, b_1) = 1$, deci $a_1 = 1$, ... **1p**

deci $d = b_1 + b_1 = 2b_1$, $a = 2b_1$ şi $b = 2b_1^2$ **1p**

Pentru orice număr natural b_1, obţinem o pereche de numere naturale cu proprietatea din enunţ, deci sunt o infinitate de astfel de numere. **1p**

Problema 2. Se consideră segmentele congruente AB, BC şi AD, unde $D \in (BC)$. Arătaţi că mediatoarea segmentului DC, bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ şi dreapta AC sunt concurente.

Soluţie



Fie F mijlocul segmentului DC şi E intersecţia bisectoarei unghiului $\widehat{ADC}$ şi a mediatoarei segmentului DC.

În triunghiul isoscel DEC avem $\widehat{EDC} \equiv \widehat{DCE}$. Pe de altă parte $\widehat{EDC} \equiv \widehat{ADE}$, DE fiind bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$. **2p**

Astfel în triunghiul isoscel ABD avem $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADB}) = 180° - 2 \cdot m(\widehat{ADE})$. **2p**

Deci în triunghiul isoscel ABC măsurile unghiurilor congruente sunt $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = \dfrac{180° - m(\widehat{ABC})}{2} = m(\widehat{ECD})$. **2p**

Deci $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ECD})$, de unde punctele A, E şi C sunt coliniare, adică dreptele din cerinţă sunt concurente. **1p**

Problema 3. Fie numerele naturale $a \neq 0$, $b = 2a + 1000$, $c = a + 1$ şi $d = 2a + 1002$.

a) Arătaţi că $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$.

b) Pentru $a = 9$, determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care $\dfrac{a+n}{b+n} > \dfrac{c+n}{d+n}$.

Soluţie.

a) $\dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a+1}{2a+1002} - \dfrac{a}{2a+1000} = \dfrac{1000}{(2a+1002)(2a+1000)} > 0$ de unde rezultă concluzia. **3p**

b) $\dfrac{a+n}{b+n} - \dfrac{c+n}{b+n} = \dfrac{9+n}{1018+n} - \dfrac{10+n}{1020+n} = \dfrac{n-1000}{(1018+n)(1020+n)} > 0$, rezultă $n > 1000$, iar cel mai mic număr natural cu această proprietate este $n = 1001$. **4p**

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Vom spune că o mulţime A de numere naturale este *completă de mărime n* dacă elementele ei sunt nenule, iar mulţimea tuturor resturilor obţinute la împărţirea unui element din A la un element din A este $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. De exemplu, mulţimea $\{3, 4, 5\}$ este o mulţime completă de mărime 4.

Determinaţi numărul minim de elemente ale unei mulţimi complete de mărime 100.

Soluţie. Răspuns: 27.

Un exemplu de mulţime completă de mărime 100 cu 27 de elemente este

$$\{76, 77, 78, \ldots, 100\} \cup \{51, 152\}.$$

Într-adevăr, la împărţirile $100 : x$, $76 \leq x \leq 100$, obţinem resturile $0, 1, 2, \ldots, 24$, la împărţirile $x : 51$, $76 \leq x \leq 100$, obţinem resturile $25, 26, \ldots, 49$, la împărţirile $152 : x$, $77 \leq x \leq 100$, obţinem resturile $52, 53, \ldots, 75$, la împărţirile $x : 152$, $76 \leq x \leq 100$, obţinem resturile $76, 77, \ldots, 100$, la împărţirea $51 : 152$ obţinem restul 51 şi la împărţirea $152 : 51$ obţinem restul 50. .... **4p**

Arătăm acum că orice mulţime completă de mărime 100 are cel puţin 27 de elemente.

Observăm că dacă $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_n\}$ este o mulţime de tipul cerut, atunci cel mai mare rest care se obţine la împărţirea a două elemente din A este a_{n-1}, obţinut la împărţirea $a_{n-1} : a_n$. Deducem că $a_{n-1} = 100$.

Să urmărim acum resturile $\geqslant 50$. Aceste resturi se obţin sigur când împărţim elemente $\geqslant 51$ la elemente mai mari decât ele şi se mai pot obţine doar când împărţim a_n la elemente $\geqslant 51$. Astfel, numărul resturilor $\geqslant 50$ obţinute este cel mult dublul numărului elementelor lui A cuprinse între 51 şi 100. Deoarece numărul resturilor $\geqslant 50$ care trebuie obţinute este 51, rezultă că A trebuie să conţină cel puţin 26 de numere dintre $51, 52, 53, \ldots, 100$. Cum A conţine şi elementul $a_n > 100$, reiese că A are cel puţin 27 de elemente. **3p**