

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "SFERA"- ediția a-XV-a**  
**BĂILEȘTI, 31 martie 2018**  
**Clasa a V-a**



**Partea I (50 puncte)**

**Pentru întrebările 1- 5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.**

- Câtul și restul împărțirii numărului  $1 + 2 + 3 + \dots + 2010$  la 2010 sunt:  
a)  $C=1004, R=1004$ ; b)  $C=999, R=1003$ ; c)  $C=1005, R=0$ ; d)  $C=1005, R=1005$ .
- Fie  $a, b, c, d, e$  numere naturale nenule. Știind că  $c + 4d + 5e = 41$  și  $41a + 82b + 172c + 196d + 245e = 4018$ , atunci  $a + 2b + 3c$  este egal cu:  
a) 94; b) 49; c) 46; d) 64.
- Restul împărțirii numărului  $N = 2013! + 2014$  la 2015, micșorat cu 12, (unde  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ), reprezintă anul în care a apărut revista Sfera. Acest an este:  
a) 2004; b) 2003; c) 2002; d) 2001.
- Ultima cifră a numărului  $a = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 40^3 + 2018^{2017}$  este:  
a) 5; b) 4; c) 8; d) 9.
- O familie are mai mulți copii. Orice fetiță are același număr de surori și frați, iar orice băiețel are de trei ori mai multe surori decât frați. Câți copii sunt în familie ?  
a) 5; b) 3; c) 4; d) 6.

*Probleme propuse de prof. Nicolae Ivășchescu, Canada*

**Partea a -II-a**

**Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete.**

**Problema 1 (20 puncte)**

- a) Determinați numărul natural prim  $\overline{aab}$  pentru care  $a \cdot c \cdot \overline{aab} + \overline{cd} + c = 2017$ , iar  $c$  și  $\overline{cd}$  sunt numere prime.

*prof. Nicolae Ivășchescu, Canada*

- b) Să se arate că numărul  $13^{4033}$  se poate scrie ca sumă a patru pătrate perfecte distincte nenule.

*prof. Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu*

**Problema 2 (20 puncte)**

Pe o masă sunt 8 cartonașe pe care sunt scrise câte un număr natural nenul, oricare două numere fiind diferite între ele. Mirela ordonează crescător cartonașele, așezând pe cel mai mic în stânga, iar pe cel mai mare în dreapta. Acum, Cristi observă că dacă se înmulțește al treilea număr cu ultimul, iar la rezultat se adună produsul celor 6 numere scrise pe cartonașele rămase, se obține 2013. Aflați cele 8 numere scrise pe cartonașe.

*prof. dr. habil. Cristinel Mortici, Târgoviște, Revista Sfera Matematicii nr. 22*

**Timp de lucru: 2 ore și 30 minute. Din oficiu se acordă: 10 puncte.**

## BAREM DE CORECTARE CLASA a V-a

### Partea I

1. d); 2. b); 3. c); 4. c); 5. a) .

### Partea a II a

#### Problema 1

a) Numărul  $c$  poate fi 2, 3, 5 sau 7. (1p)

Dacă  $c=2$ , atunci  $\overline{cd} = 23$  sau  $\overline{cd} = 29$ . Dacă  $\overline{cd} = 23$ , atunci  $a \cdot \overline{aab} = 996 = 3 \cdot 332$ , care nu convine. (1p)

Dacă  $\overline{cd} = 29$ , atunci  $a \cdot \overline{aab} = 993 = 3 \cdot 331$ , de unde se obține că  $\overline{aab} = 331$ . (1p)

Dacă  $c=3$ , atunci  $\overline{cd} = 31$ , de unde se obține că  $a \cdot \overline{aab} = 661$ , care nu convine. (1p)

Dacă  $\overline{cd} = 37$  se obține că  $a \cdot \overline{aab} = 660$ , care nu convine. (1p)

Dacă  $c=5$ , atunci  $\overline{cd} = 53$ , sau  $\overline{cd} = 59$  obținem  $a \cdot 5 \cdot \overline{aab} = 1959$ , sau  $a \cdot 5 \cdot \overline{aab} = 1953$  care nu convin. (2p)

Dacă  $c=7$ , atunci  $\overline{cd}$  poate fi 71, 73 sau 79 care nu conduc la o soluție. (2p)

Finalizare  $\overline{aab} = 331$ . (1p)

b)  $13^{4033} = 13^{2016} \cdot 13^{2017}$

(2p)

$$13^{2016} = 13^2 \cdot 13^{2014} = (5^2 + 12^2) \cdot (13^{1007})^2 = (5 \cdot 13^{1007})^2 + (12 \cdot 13^{1007})^2 \quad (2p)$$

$$13^{2017} = 13 \cdot 13^{2016} = (4 + 9) \cdot 13^{2016} = (2^2 + 3^2) \cdot (13^{1008})^2 = (2 \cdot 13^{1008})^2 + (3 \cdot 13^{1008})^2 \quad (2p)$$

Deci ,

$$13^{4033} = [(5 \cdot 13^{1007})^2 + (12 \cdot 13^{1007})^2] \cdot [(2 \cdot 13^{1008})^2 + (3 \cdot 13^{1008})^2] = \quad (2p)$$

$$= (10 \cdot 13^{2015})^2 + (15 \cdot 13^{2015})^2 + (24 \cdot 13^{2015})^2 + (36 \cdot 13^{2015})^2 \quad (2p)$$

#### Problema 2

Notăm numerele naturale nenule căutate cu  $a, b, c, d, e, f, g, h$  cu proprietatea :

$$a < b < c < d < e < f < g < h \text{ și } a \cdot b \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g + c \cdot h = 2013. \quad (2p)$$

$$\text{Deoarece } 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040 > 2013, \text{ rezultă că } a=1. \quad (2p)$$

$$\text{Deoarece } 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2520 > 2013, \text{ rezultă că } b=2. \quad (2p)$$

$$\text{Deoarece } 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 3360 > 2013, \text{ rezultă că } d \text{ poate fi egal cu } 3 \text{ sau } 4. \quad (2p)$$

$$\text{Dar } c < d, \text{ deci } c=3 \text{ și } d=4. \text{ Deoarece } 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 2688 > 2013, \text{ rezultă } e=5. \quad (4p)$$

$$\text{Deoarece } 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 2240 > 2013, \text{ rezultă } f=6. \quad (2p)$$

$$\text{Deoarece } 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 = 2160 > 2013, \text{ rezultă } g=8. \quad (2p)$$

$$\text{În final, se obține } h=31. \quad (2p)$$

$$\text{Finalizare , } 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 + 3 \cdot 31 = 2013. \quad (2p)$$