CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ “SFERA” Ediția a-XV-a
Băilești, 31 martie 2018
Clasa a VIII - a

Partea I (50 puncte)
Pentru întrebările 1- 5, scrieţi pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. (10p) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x < 0, y < 0$, calculând:
$|-x + xy| - |2y - xy| - |3x + 2y|$, obținem:
a) $4x + 4y - 2xy$ b) $2x + 4y$ c) $-4x - 2y$ d) $-2x - 2xy$

2. (10p) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $S_n = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$. Pentru $m \in \mathbb{N}, m \geq 3$, cardinalul mulțimii $A = \left\{n \in \mathbb{N}^* \middle| \frac{m}{m+1} \leq S_n \leq \frac{m+1}{m+2}\right\}$ este egal cu:
a) $m^2 + 2m$ b) $m^2 + 4m + 3$ c) $2m + 3$ d) $2m + 4$

3. Fie $E(x) = \left[\frac{81}{(x-3)(x+3)(x^2+9)+81} - \frac{1}{16-(4+x)(4-x)}\right] : 2\left(\frac{x+9}{x^4}\right)^{-1}, x \in \mathbb{R} - \{-9, 0\}$. Dacă $p = E(1) \cdot E(2) \cdot E(3) \cdot \ldots \cdot E(2018)$, iar s reprezintă suma primelor 30 de zecimale ale numărului $\left(E\left(\frac{19}{2}\right)\right)^{50}$, atunci:

(5p) a) $p = 0$ b) $p = 2018$ c) $p = 2018!$ d) $9^5 \cdot 16^2$

(5p) a) $s = 1009$ b) $s = 2018$ c) $s = 15 \cdot 31$ d) $s = 0$

4. Se consideră $ABCD$ un romb cu diagonalele $AC = 8cm, BD = 6\ cm$. În punctul N, mijlocul segmentului AO, $AC \cap BD = \{O\}$, se ridică perpendiculara MN pe planul rombului, $MN = 2\sqrt{3}\ cm$. Aria triunghiului MBD, este:
a) $18\sqrt{2}\ cm^2$ b) $12\ cm^2$ c) $8\sqrt{3}\ cm^2$ d) $6\sqrt{12}\ cm^2$

5. Pătratele $ABCD$ și $ABMN$ sunt situate în plane perpendiculare. Măsura unghiului diedru format de planele (MAD) și (MND), este:
a) 30^0 b) 45^0 c) 60^0 d) 75^0

Probleme propuse de prof. Cristian Moanță, Craiova

Partea a –II-a
Pentru problemele 1 şi 2, scrieţi pe lucrare rezolvările complete.

Problema 1 (20 puncte)

a) Determinaţi numărul natural $\overline{xy}$ pentru care: $\frac{1}{\sqrt{\overline{xy}}-1} = \overline{0,xy}$, în sistemul zecimal.

Prof. Cristian Moanță , Craiova

b) Dacă $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ și $x + y + z = 2$, arătați că: $\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{y^2 + 22} + \sqrt{z^2 + 17} > 10$.

Prof. Cezar Ozunu, Daneți, Sfera Matematicii nr. 23

Problema 2 (20 puncte)

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, punctele $M \in (A'D'), N \in (AB), P \in (CC')$, cu $D'M = AN = CP$ și punctele $X \in (D'C'), Y \in (BC), Z \in (AA')$ cu $C'X = YB = ZA'$. Demonstrați că $(XYZ) || (MNP)$.

Prof. Cristian Moanță , Craiova

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute. Din oficiu se acordă: 10 puncte.

BAREM DE CORECTARE CLASA a VIII-a

Partea I

1. **b)** 2. **d)** 3. **a)**$p = 0$, **d)**$s = 0$ 4. **b)** 5. **c)**

Partea a II - a

Problema 1

a) Egalitatea din enunţ se scrie: $\frac{1}{\sqrt{10x+y}-1} = \frac{10x+y}{100}$. **(2p)**

Notând $z = \sqrt{10x + y}$, rezultă:

$\frac{1}{z-1} = \frac{z^2}{100}$. Cum $z^3 - z^2 - 100 = (z^3 - 125) - (z^2 - 25) = (z - 5) \cdot (z^2 + 4z + 20)$ şi $z^2 + 4z + 20 > 0, \forall z \in \mathbb{R}$, deducem că $z = 5$. **(5p)**

Atunci $\sqrt{10x + y}$=5, de unde $10x + y = 25$.

Aşadar $\overline{xy}$=25. **(3p)**

b) Folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătrată de ordinul patru, avem:

$$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x^2+1^2+1^2+1^2} > \frac{x+1+1+1}{2} = \frac{x+3}{2}$$ **(2p)**

$$\sqrt{y^2+22} = \sqrt{y^2+2^2+3^2+3^2} > \frac{y+2+3+3}{2} = \frac{y+8}{2}$$ **(2p)**

$$\sqrt{z^2+17} = \sqrt{z^2+2^2+2^2+3^2} > \frac{z+2+2+3}{2} = \frac{z+7}{2}$$ **(2p)**

$$\Rightarrow S > \frac{x+3}{2} + \frac{y+8}{2} + \frac{z+7}{2} = \frac{x+y-z}{2} + \frac{18}{2} = 1+9 = 10 \Rightarrow S > 10$$ **(4p)**

Problema 2 Notăm $AB = a, D'M = x$ și $C'X = y$. Din triunghiul $A'AN$ dreptunghic în A avem $A'N^2 = a^2 + x^2$, iar din triunghiul $A'NM$ dreptunghic în A' avem $MN = \sqrt{a^2 + x^2 + (a - x)^2}$. **(3p)**

Analog obținem $NP = \sqrt{a^2 + x^2 + (a - x)^2}$ și $MP = \sqrt{a^2 + x^2 + (a - x)^2}$. Prin urmare, triunghiul MNP este echilateral. Analog triunghiul XYZ este echilateral. **(3p)**

Pe de altă parte, din triunghiul $B'A'M$ dreptunghic în A' avem $B'M = \sqrt{a^2 + (a - x)^2}$ și analog $B'N = \sqrt{a^2 + (a - x)^2}$, respectiv $B'P = \sqrt{a^2 + (a - x)^2}$. Prin urmare, piramida cu vârful în B' și baza MNP este o piramidă regulată. **(4p)**

Dacă $B'O \perp (MNP)$, atunci O este centrul cercului circumscris triunghiului MNP. **(2p)**

Dar și piramida cu vârful în D și baza MNP este o piramidă regulată, de unde $DO \perp (MNP)$. **(2p)**

Rezultă că punctele B', O și D sunt coliniare, mai mult $B'D \perp (MNP)$. **(2p).**

Asemănător se arată că $B'D \perp (XYZ)$. **(2p).**

Rezultă că $(XYZ) \| (MNP)$. **(2p)**