CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA" EDIȚIA a XV-a

BĂILEȘTI, 31 MARTIE 2018

Clasa a IX-a

Partea I (50 puncte)
Pentru întrebările 1- 5 scrieţi pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1) Fie x, y si z trei numere reale astfel incat $x^2 \leq y\cdot z$, $y^2 \leq x\cdot z$ si $z^2 \leq x\cdot y$. Atunci valoarea produsului $(x - y)\cdot(2\cdot y - 3\cdot z)\cdot(4\cdot z - 5\cdot x)$ este :

a) 0 b) 1 c) 2017 d) 2018

2) Fie ABCDEF un hexagon regulat cu latura de 6 cm. Atunci vectorul $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{CE}$ are lungimea egala cu:

a) $6\cdot\sqrt{3}$ cm b) $3\cdot\sqrt{3}$ cm c) 12 cm d) 10 cm

3) Se considera multimea $A = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{Z}^*, y \in \mathbb{Z}^* \text{ si } |x| + |y| = 100\}$. Atunci numarul de elemente al multimii A este :

a) 398 b) 394 c) 396 d) 200

4) Se considera triunghiul ABC si punctele $M \in [AB]$ si $N \in [AC]$ astfel incat $AM = MB$ si $AN = 3\cdot NC$. Daca $MN \cap BC = \{P\}$ si $\overrightarrow{NP} = b\cdot \overrightarrow{AB} + c\cdot \overrightarrow{AC}$, atunci suma b + c are valoarea :

a) $\frac{4}{3}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{3}$

5) I si J sunt doua intervale de numere reale astfel incat $I \cup J = [0, 6]$ si $I \cap J = [4, 6]$.
Multimea $(I \setminus J) \cup (J \setminus I)$ este:

a) [0 , 6] b) [0 , 4] c) [4 , 6) d) [0, 4)

Probleme selectate si propuse de prof. Ionuț Ivănescu, Craiova

Partea a –II-a (40 puncte)
Pentru problemele 1 şi 2, scrieţi pe lucrare rezolvările complete.

1) Demonstrați că : $1{,}0049 < \left(1+\frac{1}{100^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{101^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{199^2}\right) < 1{,}0051.$

Prof. dr. habil. Cristinel Mortici, Revista Sfera Matematicii nr. 22

2) Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ și a_n, a_{n+1}, a_{n+2} sunt în progresie aritmetică pentru orice *n* număr impar și în progresie geometrică pentru orice *n* număr par.

Arătați că:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{a_{2k-1}\cdot a_{2k}} = \frac{n-1}{n} \ .$$

Prof. Mihaly Bencze, București

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute. Din oficiu se acordă: 10 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI EVALUARE

Clasa a IX – a

Oficiu …………………………………………………………………………………...10p

Partea I: **1)** a **2)** a **3)** c **4)** c **5)** d ……………........50p

Partea a II – a

1) Avem $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)>1$, $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)<1$. **(10p)**

Deci,

$$\prod_{k=99}^{198}\left(1+\frac{1}{(k+1)^2}\right)<\prod_{k=99}^{198}\frac{1}{1-\frac{1}{k^2}}=\frac{9801}{9751}<1{,}0052$$ (**5p**)

$$\prod_{k=100}^{199}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)>\prod_{k=99}^{198}\frac{1}{1-\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{202}{201}>1{,}0049$$ (**5p**)

2) Deoarece $a_1,\ a_2,\ a_3$ sunt în progresie aritmetică, rezultă $a_3=2a_2-a_1=2$. **(4p)**

Deoarece $a_2,\ a_3,\ a_4$ sunt în progresie geometrică, rezultă $a_4=\frac{{a_3}^2}{a_2}=4$. **(4p)**

Prin inducție matematică se arată că dacă $a_{2k-1}=k(k-1)$ și $a_{2k}=k^2$, atunci

$a_{2k+1}=2a_k-a_{2k-1}=k(k+1)$ și $a_{2k+2}=\frac{{a_{2k+1}}^2}{a_{2k}}=(k+1)^2$. **(4p)**

Atunci

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{a_{2k-1}\cdot a_{2k}}=\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{k^3\cdot(k-1)}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{n-1}{n}$$ (**8p**)