CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”- EDIȚIA a XV-a

BĂILEȘTI, 31 MARTIE 2018

Clasa a X-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1) Partea întreagă a numărului $\log_2 \sqrt[3]{2018}$ este egală cu:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

2) Suma soluțiilor ecuației $3^{x^2-2017x} - 3^x = 2018x - x^2$ este :

a) 1 b) 2017 c) 2018 d) 2019

3) Fie a, b, c numere reale strict pozitive astfel încât $2^a = 35, 5^b = 14, 7^c = 10$. Numărul $abc - a - b - c$ este egal cu :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

4) Mulțimea numerelor reale x pentru care există numărul $\log_{2-x-x^2}(2x-1)$ este:

a) $\left(\frac{1}{2},1\right)$ b) $(0,1)$ c) $\left(\frac{1}{2},1\right)\setminus\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ d) $\left(\frac{1}{2},1\right)\setminus\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

5) Fie a, b, c numere reale distincte două câte două și

$$E = \frac{a^2+ibc}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2+iac}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2+iab}{(c-a)(c-b)}.$$

Valoarea lui E este:

a) 1+i b) i c) 1-i d) 0

Partea a II-a (40 puncte):

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete

1) Determinați numerele naturale nenule n cu proprietatea

$$\log_2 n + \log_3 n > \frac{5n}{6}.$$

(20 puncte)

Prof. Cătălin Cristea, Craiova

2) Fie ecuația (1) $x^2 + y^3 + z^4 = t^5$.

a) Găsiți un cvartet de numere naturale nenule x, y, z, t care verifică ecuația (1).

b) Demonstrați că ecuația (1) are o infinitate de soluții. **(20 puncte)**

Prof. Dorin Mărghidanu, Corabia, Revista Sfera, Nr.1/2004

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute. Din oficiu se acordă: 10 puncte

BAREM DE EVALUARE CLASA a X-a

Partea I : 1) b 2) c 3) c 4) d 5) a

Partea a II-a:

1) Pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \neq 3$ avem $2^n \geq n^2$ de unde obținem

$n \geq 2\log_2 n \Leftrightarrow \log_2 n \leq \frac{n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \neq 3$..(5p)

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $3^n \geq n^3$ de unde obținem $n \geq 3\log_3 n \Leftrightarrow \log_3 n \leq \frac{n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. ……………(5p)

Prin adunare obținem $\log_2 n + \log_3 n \leq \frac{5n}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{3\}$. …………………………………………...(5p)

Cum pentru $n = 3$ avem $\log_2 3 + 1 > \frac{5}{2} \Leftrightarrow \log_2 3 > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 9 > 8$ rezultă că singura soluție este n=3……...(5p)

2) a) Deoarece $3^{24} + 3^{24} + 3^{24} = 3^{25} \Leftrightarrow \left(3^{12}\right)^2 + \left(3^8\right)^3 + \left(3^6\right)^4 = \left(3^5\right)^5$ rezultă că o soluție nenulă a ecuației (1) este $x_0 = 3^{12},\ y_0 = 3^8,\ z_0 = 3^6,\ t_0 = 3^5$ ……………………..……………………………(10p)

b) Înmulțind egalitatea $x_0^2 + y_0^3 + z_0^4 = t_0^5$ cu $k^{60}, k \in \mathbb{N}$ obținem $\left(k^{30}x_0\right)^2 + \left(k^{20}y_0\right)^3 + \left(k^{15}z_0\right)^4 = \left(k^{12}t_0\right)^5$ deci cvartetul $\left(k^{30}x_0, k^{20}y_0, k^{15}z_0, k^{12}t_0\right)$ este de asemenea o soluție a ecuației (1), pentru orice $k \in \mathbb{N}$. ……………………………………………………….…...(10p)