DEFINITIVAT

MATEMATICĂ

1960 – 2017

CUPRINS

DEFINITIVAT 1960
PROFESORI I

1. Se consideră punctele $A(-2,0)$, $B(0,4)$, $C(6,0)$.

- **a)** Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului ortic al triunghiului $\triangle ABC$.
- **b)** Să se verifice că acest cerc trece prin mijloacele laturilor triunghiului $\triangle ABC$ şi prin mijloacele segmentelor care unesc ortocentrul cu vârfurile triunghiului.
- **c)** Să se demonstreze geometric că cele nouă puncte de la a) şi b) sunt pe acelaşi cerc.

2. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul $(2n+1)^5 - 2n - 1$ este divizibil cu 240.

PROFESORI II

1. Să se arate că dacă dintr-un punct M, situat pe cercul circumscris unui triunghi $\triangle ABC$, se duc perpendiculare pe cele trei laturi ale triunghiului, atunci picioarele perpendicularelor sunt coliniare.

2. Să se discute sistemul:

$$\begin{cases} 3x + my + n = 0 \\ (m+2)x + 8y + n + 2 = 0 \end{cases}.$$

DEFINITIVAT 1961
PROFESORI I

1. Se dă curba $x^2 + y^2 = a^2$ şi o dreaptă variabilă paralelă cu axa Ox care taie curba în punctele A şi B. Notând cu P şi Q punctele unde Oy taie curba, se cere să se determine elementele şi să se construiască locul geometric al punctului M de intersecţie a dreptelor BP şi AQ.

2. Să se arate că produsul $ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ este divizibil cu 30 oricare ar fi a şi b numere întregi.

3. Să se arate că dacă atât laturile cât şi unghiurile unui triunghi luate în aceeaşi ordine formează o progresie aritmetică, atunci triunghiul este echilateral.

PROFESORI II

1. O dreaptă oarecare d intersectează laturile AB, BC, CD, DA ale dreptunghiului sau prelungirile lor respectiv în M, N, P, Q. Fie M', N', P', Q' simetricele acestor puncte faţă de mijloacele laturilor pe care sunt situate. Să se arate că patrulaterul $M'N'P'Q'$ este trapez.

2. Să se descompună în factori expresia:

$$(a + b + c)^3 + (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) + 8abc.$$

DEFINITIVAT 1962
PROFESORI I

1. Se dă un cerc şi un punct A. Se duce un diametru variabil MN. Dreptele AM şi AN întâlnesc cercul dat în punctele M' şi N'.

- **a)** Să se arate că dreapta $M'N'$ trece printr-un punct fix când diametrul MN variază.
- **b)** Să se demonstreze că cercul circumscris triunghiului $\triangle AM'N'$ trece printr-un punct fix, altul decât punctul A.
- **c)** Să se afle locul geometric al punctului de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor $\triangle AMN$ şi $\triangle A'M'N'$ (altul decât A).

2. Să se arate că expresia $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ este divizibilă cu 17, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

PROFESORI II

1. Razele bazelor unui trunchi de con sunt de 3 m şi 4 m, iar înălţimea de 7 m. Să se afle raza sferei circumscrise.

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61 \\ 2yz = x(y+z) \end{cases} .$$

DEFINITIVAT 1963
PROFESORI I

1. Se dau punctele $A(a, 0)$ şi $P(0, p)$.

- **a)** Să se scrie ecuaţia parabolei cu axa paralelă cu Ox ce trece prin originea O a axelor şi este tangentă în P dreptei AP.
- **b)** În condiţiile A fix şi P mobil pe Oy, să se găsească locul geometric al punctului de intersecţie al tangentelor în O şi în P la parabolă.
- **c)** În aceleaşi condiţii, prin fiecare punct M_0 al planului trec două dintre aceste parabole. Să se determine locul geometric al punctelor M_0 pentru care tangentele la cele două parabole în M_0 sunt perpendiculare.

2. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}}$.

PROFESORI II

1. Se dau două cercuri tangente exterioare, unul cu raza de 9 m şi celălalt cu raza de 3 m. Se cer:

- **a)** Aria figurii cuprinsă între cele două cercuri şi tangentele comune exterioare.
- **b)** Aria şi volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul liniei centrelor a patrulaterului cu vârfurile în centrele celor două cercuri şi în punctele de tangenţă ale unei tangente comune exterioare.

2. Să se determine valorile parametrului m astfel încât fracţia

$$\frac{x^4 + m^2x^3 + (m+1)x^2 + (4m+1)x - 3}{x^2 - 1}$$

să se simplifice.

DEFINITIVAT 1964
PROFESORI I

1. Se dă unghiul $\sphericalangle xOz$. Pe axa Ox, de aceeaşi parte a lui O, se iau punctele fixe A şi B. Prin A şi B se duce un cerc mobil care taie axa Oz în punctele A' şi B'.

- **a)** Notând $\sphericalangle xOz$ cu α, să se determine cercul $(\mathscr{C})$ astfel încât patrulaterul $ABB'A'$ să aibă aria constantă.
- **b)** Să se studieze variaţia volumului corpului obţinut prin rotirea patrulaterului $ABB'A'$ în jurul axei Ox, când cercul $(\mathscr{C})$ variază.
- **c)** Câte cercuri $(\mathscr{C})$ corespund unui volum dat?

2. Limita unei funcţii (teorie).

Aplicaţie: Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$.

PROFESORI II

1. În punctele A şi B ale unui cerc se duc două tangente care se întâlnesc în punctul C. Prin A se duce o paralelă la BC care taie cercul şi în D. Dreapta CD taie a doua oară cercul în E, iar $AE \cap BC = \{F\}$. Să se demonstreze că:

- **a)** $\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle CAE$.
- **b)** $FC^2 = FA \cdot EF$.
- **c)** $FB = FC$.

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}.$$

DEFINITIVAT 1965
PROFESORI I

1. Se dă un cerc şi un punct fix O pe cerc. Prin O se duce o secantă mobilă care mai taie cercul într-un punct M. Fie A punctul diametral opus punctului O, iar N punctul de intersecţie a dreptei OM cu tangenta la cerc în punctul A. Pe OM se ia un punct P astfel ca $OP = MN$. Se cere:

a) Să se determine locul geometric al punctului P.

b) Să se reprezinte grafic locul geometric găsit.

2. Numere iraţionale. Metodica introducerii numerelor iraţionale.

PROFESORI II

1. Într-un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ se duce diametrul AB. Pe tangenta în B la cerc se ia $BC = r$. Se uneşte C cu O şi se prelungeşte până întâlneşte cercul în punctul D. Să se calculeze:

a) Aria şi perimetrul figurii mărginite de secantele AC, CD şi de arcul $\overset{\frown}{AD}$.

b) Aria totală şi volumul corpului obţinut prin rotirea triunghiului $\triangle ADC$ în jurul tangentei BC.

2. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:

$$3x - 5y = 7.$$

DEFINITIVAT 1966
PROFESORI I

1. Considerăm un cerc de centru O şi două diametre perpendiculare Ox, Oy. Fie M un punct mobil pe cerc. Tangenta în M taie axa Oy în Y. Purtăm pe axa Ox într-un sens segmentul $ON = OY$ şi proiectăm punctul N în P pe tangentă.

- **a)** Să se arate că dreapta NP este tangentă cercului şi că aria triunghiului $\triangle OMN$ este constantă.
- **b)** Să se determine locul geometric al punctului P.
- **c)** Să se afle locul proiecţiei punctului N pe raza OM.

2. **a)** Definiţia derivatei unei funcţii (teorie).

- **b)** Să se reprezinte grafic funcţia:

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

- **c)** Să se stabilească legătura cu problema precedentă.

PROFESORI II

1. În triunghiul $\triangle ABC$ se duce bisectoarea AE şi mediana AM. Bisectoarea AE şi mediatoarea laturii BC se întâlnesc în punctul A'.

- **a)** Să se demonstreze că dacă triunghiul $\triangle AMA'$ este isoscel, atunci triunghiul $\triangle ABC$ este dreptunghic.
- **b)** Cu condiţia ca înălţimea, bisectoarea şi mediana dusă din A să împartă unghiul $\sphericalangle A$ în patru părţi egale, să se calculeze în funcţie de $BC = a$ aria şi volumul corpului obţinut prin rotirea triunghiului $\triangle ABC$ în jurul bisectoarei a doua a unghiului $\sphericalangle A$.

2. Să se simplifice fracţia:

$$\frac{a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) + 3abc}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}.$$

DEFINITIVAT 1967
PROFESORI I

1. **a)** Se consideră axele ortogonale Ox şi Oy. Prin punctul $C(\alpha, \beta)$ se duce o secantă variabilă care taie pe Ox în M şi pe Oy în N. Se uneşte M cu $B(0,1)$ şi N cu $A(1,0)$. Să se arate că locul intersecţiei dreptelor NA şi MB este o conică.

b) Se consideră conicele $(\mathscr{H})$ de ecuaţie $\beta x^2 + xy + \alpha y^2 - \beta x - \alpha y = 0$. Să se discute natura şi genul acestor conice.

c) Să se arate că oricare ar fi α şi β, conicele $(\mathscr{H})$ trec prin trei puncte fixe. Fie $(\mathscr{K})$ acele conice $(\mathscr{H})$ care mai trec şi prin punctul $P(2,2)$. Se cere genul acestor conice şi locul centrelor lor.

2. Se consideră ecuaţia diferenţială:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \sqrt{2} \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Se cere:

a) Soluţia generală $y(x)$.

b) Să se determine soluţia particulară $y_1(x)$ cu condiţiile $y_1(0) = 1$ şi $y_1'(0) = \sqrt{2}$.

c) Să se calculeze aria porţiunii din plan cuprinsă între graficul funcţiei $y_1(x)$ şi dreptele $y = 0$, $x = 0$ şi $x = \frac{\pi}{2}$.

d) Să se arate că $y_1(x)$ este soluţie a ecuaţiei $\frac{d^8y}{dx^8} - y = 0$ şi să se deducă expresia derivatelor de diferite ordine ale funcţiei $y_1(x)$.

PROFESORI II

1. Se consideră în plan unghiul orientat $\sphericalangle AOB$ a cărui măsură α satisface condiţia $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Fie OM, ON două semidrepte duse în interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ astfel încât OM să fie situat între OA şi ON, iar $m(\sphericalangle MON) = \alpha - \frac{\pi}{2}$.

Se notează S_A, S_M, S_N, S_B simetriile definite de dreptele OA, OM, ON, OB.

Se cere să se arate că:

a) Produsul de simetrii $S_A \cdot S_M \cdot S_N \cdot S_B$ este egal cu o simetrie de centru O.

b) $S_A \cdot S_M \cdot S_N \cdot S_B = S_M \cdot S_N \cdot S_B \cdot S_A = S_N \cdot S_B \cdot S_A \cdot S_M = S_B \cdot S_A \cdot S_M \cdot S_N$.

c) Dacă (Γ) este un cerc care conţine punctul O şi intersectează semidreptele OA, OM, ON, OB respectiv în A', M', N', B', atunci dreptele $A'N'$ şi $B'M'$ sunt perpendiculare.

d) Dacă I este intersecţia dreptelor $A'N'$ şi $B'M'$ şi se notează cu (P) patrulaterul format din proiecţiile punctului I respectiv pe dreptele $A'M'$, $M'N'$, $N'B'$, $B'A'$, atunci acestui patrulater i se poate circumscrie un cerc şi i se poate înscrie un cerc.

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}.$$

DEFINITIVAT 1968
PROFESORI I
IANUARIE

1. **a)** Să se arate că funcţia $y = \arctan(ax + b)$, unde a şi b sunt constante, este soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$y^{(4)}y' - 2y'''y'' + 8y''(y')^3 = 0.$$

b) Dacă a_0, a_1, a_2, ..., a_n este o progresie aritmetică crescătoare cu termeni pozitivi şi $n = 2p-1$, să se arate că funcţiile

$$y_i(x) = \arctan(x - a_i) - \arctan(x - a_{n-i})$$

au extremele coliniare. Dacă M_i este maximul funcţiei $y_i(x)$, să se calculeze $\sum_{i=0}^{p-1} \tan \frac{M_i}{2}$ în funcţie de p, a_0 şi a_1.

c) Dacă şirul de numere reale a_0, a_1, a_2, ..., a_n este strict crescător, să se arate că funcţia

$$\sum_{i=1}^{n} \arctan(x - a_i)$$

îşi schimbă concavitatea de un număr impar de ori, când $x \in (a_1, a_n)$.

2. Fie $[R_0]$ mulţimea rotaţiilor planului având centrul în punctul O şi $[H_0]$ mulţimea omotetiilor cu centrul în O. Să se arate că mulţimea $[R_0, H_0]$ formată din produsele a câte două transformări ale mulţimii $[R, H]$ este echivalent cu o transformare a acestei mulţimi sau cu o omotetie, o rotaţie sau o translaţie. Se va arăta în ce caz are loc fiecare dintre aceste situaţii.

SEPTEMBRIE

1. Se consideră punctul fix $P(\alpha, \beta)$ raportat la un sistem de axe ortogonale Ox, Oy. O secantă mobilă dusă prin P intersectează axele Ox, Oy respectiv în N şi Q. Paralela dusă prin N la Oy şi prin Q la Ox se intersectează în punctul M. Se cere:

a) Să se afle locul geometric γ al punctelor M şi să se determine elementele curbei γ.

b) Să se determine dreptele $y = mx + n$, de direcţie dată m, tangente curbei γ.

c) Să se arate că tangentele duse din P la curba γ sunt perpendiculare şi să se cerceteze dacă există şi alte puncte care au această proprietate.

2. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty} (x + 1 - \sqrt[3]{x^3 + 1}).$$

PROFESORI II
IANUARIE

1. Se dă ecuaţia:

$$8\sin^4 x + 4\cos^4 x + 2\sin^2 2x + 8\cos 2x - 3\sin^2 x = 0.$$

a) Să se rezolve ecuaţia.

b) Utilizând pentru x valorile din cadranul al treilea aflate la punctul precedent şi cunoscând că $\tan y = -\frac{3}{4}$ (y în cadranul patru), să se calculeze $\cos(x + 2y)$.

c) Să se calculeze latura BC a triunghiului $\triangle ABC$ şi aria triunghiului, ştiind că $AB = 3$, $AC = 4$ şi că unghiul $\sphericalangle A$ are ca măsură soluţia din cadranul al doilea a ecuaţiei date.

2. Se dă un triunghi $\triangle ABC$ şi punctele M, N, P care împart segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ în raportul $k > 0$. Se cere:

a) Să se arate că triunghiurile $\triangle ABC$ şi $\triangle MNP$ au acelaşi centru de greutate.

b) Să se calculeze raportul dintre suma pătratelor lungimilor laturilor triunghiului $\triangle MNP$ şi suma pătratelor lungimilor laturilor triunghiului $\triangle ABC$.

c) Dacă triunghiul $\triangle ABC$ este dreptunghic în A, să se arate că există două valori ale lui k şi numai două pentru care triunghiul $\triangle MNP$ este dreptunghic în N.

d) Fie Γ cercul circumscris triunghiului $\triangle ABC$. Dacă punctele B, C sunt fixe, iar A mobil pe cercul Γ, locurile geometrice ale punctelor M, P sunt două cercuri Γ_1 şi Γ_2 care conţin punctele B şi C. Să se arate că Γ_1 şi Γ_2 sunt tangente exterioare dacă şi numai dacă triunghiul $\triangle ABC$ este dreptunghic în A.

SEPTEMBRIE

1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2y - y^3 + 44 = 0 \\ 2y^3 + 3xy^2 + x^2y + 20 \end{cases}.$$

2. Fie dat triunghiul $\triangle ABC$ având ortocentrul H înscris în cercul $\mathscr{C}$ de centru O. Înălţimile AA', BB', CC' ale triunghiului intersectează cercul $\mathscr{C}$ respectiv în A_1, B_1, C_1. Să se demonstreze că:

a) $A_1B_1 \parallel A'B'$.

b) $OA \perp B_1C_1$.

c) $BA' \cdot CA' = AA' \cdot A'A_1 = AA' \cdot HA'$.

d) Dacă A'', B'', C'' sunt proiecţiile unui punct M din interiorul triunghiului, respectiv pe laturile BC, CA, AB, atunci

$$\frac{MA''}{AA'} + \frac{MB''}{BB'} + \frac{MC''}{CC'} = 1.$$

e) Există relaţia:

$$\frac{BA' \cdot CA'}{AA'^2} + \frac{CB' \cdot AB'}{BB'^2} + \frac{AC' \cdot BC'}{CC'^2} = 1.$$

DEFINITIVAT 1969
PROFESORI I
IANUARIE

1. Se consideră expresiile $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $g(y) = \dfrac{y^2}{y^2+1}$.

a) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} y = f(x) \\ x = g(y) \end{cases}$.

b) În raport cu acelaşi sistem de axe rectangulare xOy, să se construiască graficele funcţiilor $y = f(x)$ şi $x = g(y)$.

c) Dacă se notează cu A, B intersecţiile acestor grafice cu dreapta $2x+2y-3=0$, să se calculeze aria porţiunii de plan cuprinsă între arcele OA, OB ale graficelor şi dreapta AB.

2. Fie A un număr natural mai mare decât 1. Să se găsească numărul natural x cu cel puţin două cifre astfel încât produsul cifrelor sale să fie egal cu $x^2-(a-1)x-2a$. Pentru ce valori ale lui a problema este posibilă?

SEPTEMBRIE

1. Se consideră ecuaţia diferenţială:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\lambda\frac{dy}{dx} + \lambda^2 y = 0,$$

unde λ este o constantă reală şi pozitivă. Se cere:

a) Soluţia generală a ecuaţiei.

b) Ecuaţia curbei integrale $C(\lambda)$ pentru care la $x=0$ avem $y=1$ şi $y' = 2\lambda$.

c) Să se reprezinte curba integrală $C(\lambda)$ în raport cu axele rectangulare $x'xy'y$.

d) Dacă $\lambda \in (0, \infty)$ este un parametru, să se afle locul geometric al punctelor de inflexiune ale curbelor $C(\lambda)$.

e) Fie A, B punctele în care o curbă $C(\lambda)$ intersectează axele $x'x$ şi $y'y$. Să se arate că pentru orice curbă $C(\lambda)$ raportul dintre aria triunghiului $\triangle OAB$ şi aria porţiunii din plan mărginită de curbă şi de segmentele $[OA]$, $[OB]$ este constant (O este originea axelor).

2. Se consideră polinomul $P(X)$ având cel puţin gradul patru şi coeficienţii numere reale. Dacă numerele oarecare a, b, $c \in \mathbb{R}^*$ sunt distinte, se cere:

a) Restul împărţirii polinomului $P(X)$ la $(X-a)(X-b)(X-c)$, ştiind că resturile împărţirilor polinomului $P(X)$ respectiv la $X-a$, $X-b$, $X-c$ sunt a^3, b^3, c^3.

b) Restul împărţirii polinomului $P(X)$ la $(X-a)^2(X-b)$, ştiind că resturile împărţirilor polinomului $P(X)$ respectiv la $(X-a)^2$, $X-b$ sunt $X+a^2$ şi b^2. Condiţia de posibilitate.

PROFESORI II
IANUARIE

1. Se dă ecuaţia:

$$8\sin^4 x + 4\cos^4 x + 2\sin^2 2x + 8\cos 2x - 3\sin^2 x = 0.$$

a) Să se rezolve ecuaţia.

b) Utilizând pentru x valorile din cadranul al treilea aflate la punctul precedent şi cunoscând că $\tan y = -\dfrac{3}{4}$ (y în cadranul patru), să se calculeze $\cos(x+2y)$.

c) Să se calculeze latura BC a triunghiului $\triangle ABC$ şi aria triunghiului, ştiind că $AB=3$, $AC=4$ şi că unghiul $\sphericalangle A$ are ca măsură soluţia din cadranul al doilea a ecuaţiei date.

2. Se dă în planul P rotaţia R de centru O şi unghi α şi simetria S a cărei axă $x'x$ nu conţine punctul O. Să se arate că există o singură rotaţie R_1 de unghi α şi centru pe $x'x$ şi o singură simetrie în raport cu o axă astfel încât $R \circ S = S_1 \circ R_1$. Să se determine R_1 şi S_1.

Notă. Se notează prin $T_2 \circ T_1$ aplicarea succesivă a transformărilor T_1 şi T_2 în ordinea T_1, apoi T_2.

SEPTEMBRIE

1. **a)** Să se determine trei numere pozitive în progresie aritmetică crescătoare, ştiind că suma pătratelor acestor numere este 35 şi că adunând celor trei numere respectiv 1, 1, 3 se obţin trei numere în progresie geometrică.

b) Să se determine coeficienţii m, n, p ai polinomului $P(x) = x^5 - 9x^4 + 24x^3 + mx^2 + nx + p$ astfel încât cele trei numere în progresie aritmetică determinate să fie rădăcini ale lui $P(x)$.

c) În aceste condiţii să se rezolve ecuaţia $P(x) = 0$.

2. Se dă triunghiul $\triangle ABC$ ale cărui unghiuri sunt ascuţite. Fie A', B', C' punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, AB şi B'', C'' proiecţiile vârfurilor B, C pe dreapta $B'C'$. Se cere:

a) Să se arate că dreapta care uneşte mijlocul segmentului $[A'B']$ cu punctul C'' este paralelă cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$ al triunghiului dat.

b) Să se arate că:

$$B''C'' = a \cos \frac{B-C}{2},$$

unde $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

c) Să se stabilească identitatea:

$$(b+c)\sin\frac{A}{2} = a\cos\frac{B-C}{2}.$$

d) Să se arate că

$$AB' + BC' + CA' = \frac{1}{r^2},$$

unde r este raza cercului înscris în triunghiul $\triangle ABC$.

DEFINITIVAT 1970
IANUARIE

1. Se dă triunghiul $\triangle ABC$ înscris în elipsa (E). Fie d_a, d_b, d_c diametrii conjugaţi dreptelor BC, CA, AB. Se cere:

a) Să se arate că paralelele duse din A, B, C respectiv la d_a, d_b, d_c sunt concurente într-un punct M.

b) Dacă A_1, A_2 sunt intersecţiile dreptei BC cu dreptele AM şi d_a; B_1, B_2 sunt intersecţiile dreptei CA cu dreptele BM şi d_b, iar C_1, C_2 sunt intersecţiile dreptei AB cu dreptele CM şi d_c, atunci punctele A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 sunt situate pe o conică.

2. Se dă ecuaţia:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 10y = 0.$$

Se cere:

a) Să se scrie ecuaţia $y = f(x)$ a curbei integrale $(\mathscr{C})$ care conţine punctul $A(0,1)$ şi a cărei tangentă în A este dreapta $5x + y - 1 = 0$.

b) Să se determine maximele şi minimele funcţiei $y = f(x)$ pentru $x \in [0, 2\pi]$.

APRILIE

1. a) Să se arate că legea de compoziţie internă $x * y = \dfrac{x+y}{xy+1}$ determină pe intervalul $(-1,1)$ o structură de grup comutativ.

b) Să se arate că între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive şi grupul de la punctul a) există un izomorfism $f : \mathbb{R}_+ \to (-1,1)$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

2. Se dă funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x-2}$.

a) Să se reprezinte grafic.

b) O dreaptă variabilă paralelă cu axa Ox intersectează graficul funcţiei în punctele M şi N şi dreapta $x = 2$ în punctul A. Să se arate că produsul $AM \cdot AN$ este constant.

c) Să se demonstreze că punctul de intersecţie al asimptotelor este centru de simetrie pentru graficul funcţiei.

3. Să se discute şi să se rezolve ecuaţia:

$$(m-1)\sin 3x + m \sin 2x + (m+1)\sin x = 0.$$

AUGUST

1. Fie α şi β două numere reale şi ecuaţia diferenţială:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\alpha\frac{dy}{dx} + \left(\alpha^2 + \beta\right) y = 0.$$

a) Să se scrie expresia integralei generale separat în fiecare din cazurile $\beta < 0$, $\beta = 0$, $\beta > 0$.

b) Fie $(\mathscr{G})$ o curbă integrală a ecuaţiei date. Care este condiţia ca $(\mathscr{G})$ să taie axa Ox de o infinitate de ori şi care este valoarea lui β pentru ca distanţa între două puncte consecutive de intersecţie să fie egală cu π?

c) În cazul în care $\beta = 1$, se cere să se calculeze aria $A(\lambda)$ cuprinsă între curba $(\mathscr{G})$, axele de coordonate şi paralela la axa Oy de abscisă λ.

d) Care este condiţia ca aria $A(\lambda)$ să tindă către o limită, când $\lambda \to \infty$, şi care este această limită?

2. Fie d_1 şi d_2 două drepte secante şi neperpendiculare. Se notează cu M_1 respectiv M_2 simetricele unui punct variabil M din planul dreptelor d_1 şi d_2 faţă de aceste drepte.

a) Să se determine mulţimea punctelor M, ştiind că lungimea segmentului $[M_1M_2]$ este constantă.

b) Să se determine mulţimea punctelor M, ştiind că dreapta M_1M_2 trece printr-un punct fix.

PROFESORI II
APRILIE

1. Notăm cu x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$, unde $b\neq 0$. Să se determine numerele a, b, c, x_1, x_2, ştiind că numerele a, x_1, b, x_2, c formează, în această ordine, o progresie aritmetică.

2. **a)** O dreaptă d din spaţiu intersectează planul P în punctul O şi face cu acest plan unghiul α. Altă dreaptă din planul P care trece prin O face cu dreapta d unghiul ϕ, iar cu proiecţia dreptei d pe plan unghiul β $\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Să se stabilească relaţia:

$$\cos\phi=\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

b) Să se exprime volumul paralelipipedului având toate feţele romburi în funcţie de latura a a unuia dintre romburi şi de unghiul u dintre două laturi consecutive ale rombului.

3. Să se arate că produsul a trei numere întregi consecutive se divide la 60, respectiv la 504 dacă factorul din mijloc este pătrat perfect, respectiv cub perfect.

AUGUST

1. Se dau mulţimile:

$$A=\{x|x=3n-2,\ n\in\mathbb{N}\}\,,$$
$$B=\{x|x=1003-2m,\ m\in\mathbb{N}\}\,,$$
$$C=\{x|x=6p+1,\ p\in\mathbb{Z},\ 0\leq p\leq 166\}\,.$$

Să se arate că $A\cap B=C$.

2. Se consideră un tetraedru $SABC$ ale cărui muchii SA, SB, SC sunt perpendiculare două câte două.

a) Să se calculeze lungimile muchiilor SA, SB, SC şi volumul tetraedrului în funcţie de laturile a, b, c ale triunghiului $\triangle ABC$.

b) Să se demonstreze că proiecţia P a punctului S pe planul triunghiului $\triangle ABC$ este ortocentrul triunghiului $\triangle ABC$.

c) Să se demonstreze că aria triunghiului $\triangle SBC$ este media geometrică între ariile triunghiurilor $\triangle PBC$ şi $\triangle ABC$.

3. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos\left(\pi x^2\right)+\cos\left(2\pi x\right)=0$$

şi să se precizeze soluţiile întregi.

DEFINITIVAT 1971
PROFESORI I

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(2x^2-3x\right)$.

a) Să se studieze variaţia ei şi să se construiască, în raport cu un sistem ortogonal de axe $x'Ox$ şi $y'Oy$ graficul funcţiei.

b) Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y''-2y'+y=4e^x$$

şi să se arate că funcţia f este o soluţie particulară a acestei ecuaţii; să se deducă apoi că $4e^x+2y-y'$ este o primitivă a lui f.

c) Să se calculeze aria $S(a)$ limitată de graficul funcţiei f, axa $x'x$ şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=a$, unde $a<0$. Să se afle $\lim\limits_{a\to-\infty}S(a)$.

d) Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, avem

$$f^{(n)}(x)=e^x\left(2x^2+a_nx+b_n\right),$$

unde a_n şi b_n sunt funcţii întregi de n. Să se stabilească apoi relaţiile $a_{n+1}=a_n+4$ şi $b_{n+1}=b_n+a_n$ şi să se determine a_n şi b_n în funcţie de n.

e) Să se arate că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, ecuaţia $2x^2+a_nx+b_n=0$ admite două rădăcini reale şi distincte.

2. Fie cercul $(\mathscr{C}_1)$ cu centrul O în originea axelor de coordonate rectangulare, de rază 2 şi punctul $A(4,0)$.

a) Să se scrie ecuaţia cercului $(\mathscr{C}_2)$ care trece prin punctul A, intersectează cercul $(\mathscr{C}_1)$ în două puncte diametral opuse faţă de O şi are raza minimă.

b) Să se găsească pe cercul $(\mathscr{C}_2)$ punctele T_1 şi T_2 astfel încât tangentele la acest cerc în aceste puncte să fie paralele cu dreapta (D) de ecuaţie $3x+4y=0$; să se arate că triunghiul $\triangle AT_1T_2$ este dreptunghic.

PROFESORI II

1. Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$. Latura cubului este $AB=3a$. Se împarte fiecare latură a cubului în câte trei părţi egale. Fie punctele de diviziune M, N, P respectiv pe laturile AB, AD, AA' cele mai apropiate de A. Se taie cubul cu planul (MNP) şi se îndepărtează piramida $AMNP$. Se procedează la fel în toate cele opt colţuri ale cubului. Se cere:

a) Să se verifice relaţia $f+v=n+2$, unde f, v şi n reprezintă numărul feţelor, al vârfurilor şi al muchiilor poliedrului rămas.

b) Să se calculeze aria şi volumul acestui poliedru.

c) Să se afle unghiul diedru format de planul (MNP) cu planul (ABC).

d) Să se determine distanţa de la vârful A până la planul (MNP).

2. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases}\sin^3 x=\dfrac{1}{2}\sin y\\[2ex] \cos^3 x=\dfrac{1}{2}\cos y\end{cases}.$$

3. Să se arate că numărul

$$x=\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$$

este raţional.

DEFINITIVAT 1972
PROFESORI I

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră şirul de funcţii $f_n : [a, \infty) \to \mathbb{R}_+$,unde $a \geq 0$, iar $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, $f_3(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, ...

- **a)** Să se arate că şirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge pe $[0, \infty)$ către o funcţie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ şi să se stabilească expresia lui $f(x)$.
- **b)** Să se scrie explicit mulţimea numerelor x pentru care $f(x)$ este un număr raţional.
- **c)** Funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ are proprietatea lui Darboux pe $[0, \infty)$?
- **d)** Să se studieze şi să se reprezinte grafic funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$.

2. Între unghiurile B şi C ale triunghiului $\triangle ABC$ există relaţia:

$$\lambda \sin B \sin C = 1 - \cos B \cos C,\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

- **a)** Să se exprime diferenţa lungimilor b şi c în dependenţă faţă de a şi λ; a, b şi c sunt lungimile laturilor triunghiului $\triangle ABC$.
- **b)** Care este domeniul maxim al numerelor λ pentru care există triunghiuri ce satisfac relaţia (1)?
- **c)** Să se demonstreze că triunghiul $\triangle ABC$ este isoscel în vârful A dacă şi numai dacă $\lambda = 1$.
- **d)** B şi C fiind puncte fixe în plan, iar λ constant în mulţimea de la punctul b), să se arate că vârful A aparţine unei hiperbole atunci când triunghiurile $\triangle ABC$ satisfac condiţia (1). Să se precizeze elementele acestei hiperbole.

PROFESORI II

1. Se consideră funcţia $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\log_x \sqrt{3x} \cdot \log_3 x}$, unde E este domeniul maxim de definiţie. Se cere:

- **a)** Să se afle mulţimea E.
- **b)** Să se afle submulţimea numerelor x inclusă în E pentru care $f(x) = -1$.

2. Se consideră semicircumferinţa de diametru $AB = 2r$, centru O şi tangenta AL. Fie MM' o coardă paralelă cu AB care, în prelungire, intersectează tangenta AL în P, $AP = l$. Se roteşte figura în jurul lui AL.

- **a)** Să se arate că suma ariilor suprafeţelor descrise de segmentele OM şi OM' este egală cu aria sferei de diametru AB.
- **b)** Pentru $m \in \mathbb{R}$, să se determine l astfel încât volumul corpului de rotaţie generat de triunghiul $\triangle MOM'$ să fie egal cu $2\pi rm^2$. Discuţie.
- **c)** Pentru ce valoare a lui m, volumul de la punctul precedent este maxim. Să se precizeze şi poziţia coardei MM' în acest caz.

DEFINITIVAT 1973
PROFESORI I

1. **a)** **(i)** Să se arate că dacă $(A, B) = d$, numerele kA, hB, unde k, $h \in \mathbb{Z}$ se divid cu d. Rezultă din $(kA + hB, B) = d$ că $(A, B) = d$?

(ii) Să se afle valorile lui A pentru care fracţia $\dfrac{A}{B} = \dfrac{3a+2}{5a+1}$ poate fi simplificată.

b) În 37 vase, unele de $30\,l$, altele de $40,5\,l$, iar altele de $52\frac{1}{3}\,l$, încap $1571\,l$. Vasele de $52\frac{1}{3}\,l$ sunt cu trei mai multe decât cele de $40,5\,l$. Câte vase sunt din fiecare fel? (Soluţie algebrică şi soluţie aritmetică).

2. **a)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5 + 4\cos x}\,dx\cdot$

b) Să se traseze curba $y = \dfrac{\cos x}{5 + 4\cos x}$.

3. **a)** Transformarea prin inversiune a unui cerc.

b) Fie MN un diametru variabil în cercul fix de centru O. Secantele AM şi AN (A punct fix) mai taie cercul în punctele M' şi N'.

(i) Să se arate că cercul AMN taie dreapta AO într-un punct fix.

(ii) Dreapta $M'N'$ trece printr-un punct fix.

PROFESORI II

1. **a)** Să se arate că dacă $(A, B) = d$, numerele kA, hB, unde k, $h \in \mathbb{Z}$ se divid cu d. Rezultă din $(kA+hB, B) = d$ că $(A, B) = d$?

b) Să se afle valorile lui A pentru care fracţia $\dfrac{A}{B} = \dfrac{3a+2}{5a+1}$ poate fi simplificată.

2. În 37 vase, unele de 30 l, altele de $40,5$ l, iar altele de $52\frac{1}{3}$ l, încap 1571 l. Vasele de $52\frac{1}{3}$ l sunt cu trei mai multe decât cele de $40,5$ l. Câte vase sunt din fiecare fel? (Soluţie algebrică şi soluţie aritmetică)

3. **a)** Patrulaterul lui Sacherri.

b) Din punctele A, B, C ale dreptei d se duc segmentele AA', BB', CC' perpendiculare pe d, egale, de aceeaşi parte a dreptei."Punctele A', B', C' sunt coliniare" este o propoziţie echivalentă cu axioma lui Euclid.

4. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases},$$

$a \in \mathbb{R}$.

DEFINITIVAT 1974
PROFESORI I

1. Să se demonstreze că:

$$\arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} -\dfrac{3\pi}{4}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1), \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{dacă } x \in (-1, \infty). \end{cases}$$

2. Fie $f : (0,1) \to (0,1)$ o funcţie pentru care

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \text{ este raţional,} \\ 1-x, & \text{dacă } x \text{ este iraţional.} \end{cases}$$

a) Să se arate că funcţia f este surjectivă.

b) Să se arate că funcţia f este injectivă.

c) Să se cerceteze continuitatea funcţiei.

3. Fie $ABCD$ un patrulater situat în planul α.

a) Să se determine mulţimea punctelor M din planul α cu proprietatea că $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$. Discuţie.

b) Să se demonstreze că dacă pentru trei poziţii necoliniare ale punctului M din planul α avem $MA^2+MC^2 = MB^2 + MD^2$, atunci patrulaterul este dreptunghi.

4. Fie $a\mathbb{Z}$ mulţimea multiplilor întregi ai numărului întreg pozitiv a.

a) Să se arate că mulţimea $a\mathbb{Z}$ este un subgrup al grupului aditiv al numerelor întregi.

b) Să se arate că orice subgrup al grupului aditiv al numerelor întregi este de forma $a\mathbb{Z}$ cu a întreg pozitiv.

5. Fie propoziţia: *"Orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ şi crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$"*.Este această propoziţie adevărată?

6. Fie $I_n = \displaystyle\int \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx\cdot$

a) Să se stabilească formula de recurenţă $(n-1)(I_n - I_{n-2}) = 2\sin(n-1)x$, $n \geq 2$.

b) Să se arate că pentru n impar are loc egalitatea:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2}\cdot$$

c) Să se arate că pentru n par are loc egalitatea:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx = 2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}+1} \cdot \frac{1}{n-1}\right]\cdot$$

7. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, unde $ad - bc \neq 0$ şi a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$. Să se găsească o condiţie necesară şi suficientă pentru ca elementele matricei A^{-1} să fie numere întregi.

PROFESORI II

1. Un muncitor trebuie să execute câte 60 de piese pe zi. Acesta a lucrat însâ cu 10 piese mai mult pe zi şi a terminat numărul de piese cerute cu 21 de zile înainte de termen, realizând în plus faţă de plan 30 piese. Se cere:

a) În cât timp trebuie executată lucrarea?

b) Câte piese trebuia să realizeze după plan?
Rezolvarea problemei se va face pe cale aritmetică.

2. Un şir de cinci numere naturale este astfel format încât primele trei sunt proporţionale cu 2, 3, 4 şi ultimele trei sunt invers proporţionale cu 2, 3, 4.

a) Să se determine cinci numere cele mai mici posibile proporţionale cu elementele acestui şir.

b) Să se calculeze cele cinci numere din primul şir, ştiind că suma lor este 123.

3. Într-un cerc de centru O se duc două diametre perpendiculare AB şi CD. Fie M un punct situat pe segmentul $[AB]$; CM întâlneşte cercul în N. Tangenta în N la cerc şi perpendiculara în M pe AB se taie în punctul P.

a) Să se demonstreze că punctele O, M, N, P sunt situate pe acelaşi cerc.

b) Să se demonstreze că dreptele CM şi OP sunt paralele.

c) Ce descrie punctul P când M parcurge segmentul $[AB]$.

4. **a)** Să se studieze variaţia funcţiei:

$$f(x) = -1 + |x+1| - 2|x| + |x-1|$$

şi să se construiască graficul corespunzător.

b) Să se rezolve inecuaţia:

$$|x+1| + |x-1| > 2|x| + \frac{2x+4}{5}.$$

DEFINITIVAT 1975
PROFESORI I

1. Notăm cu $\mathscr{P}(X)$ mulţimea părţilor mulţimii X.

a) Să se demonstreze că oricare ar fi mulţimile A, B, avem:

$$\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B).$$

b) Să se arate că $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B)$ dacă şi numai dacă $A \subset B$ sau $B \subset A$.

2. Să se rezolve şi să se discute sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n + x_1 = 0 \end{cases}.$$

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x - a| + a$, $a \in \mathbb{R}$. Folosind definiţia derivatei, să se determine a astfel încât funcţia să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

4. Fie $(\mathscr{C})$ o curbă care are tangentă în fiecare punct al ei. Tangenta într-un punct M, mobil pe $(\mathscr{C})$, taie axa absciselor în punctul T. Să se găsească curbele $(\mathscr{C})$ pentru care lungimea proiecţiei ortogonale a segmentului $[MT]$ pe axa absciselor este o constantă dată $u > 0$.

5. Să se calculeze: $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{|x - a| + 1}$, $a \in \mathbb{R}$.

6. Dreptele d_1, d_2 sunt situate în planul α. Să se determine mulţimea punctelor din planul α care au suma distanţelor la dreptele d_1, d_2 egală cu o constantă dată $k > 0$. Discuţie.

7. Fie propoziţia: *"Există triunghiuri care nu sunt isoscele şi nici dreptunghice şi în care $a + h_a = b + h_b$"*. Este adevărată această propoziţie? (a, b sunt lungimile laturilor, iar h_a, h_b sunt lungimile înălţimilor corespunzătoare).

8. Să se demonstreze că $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$ dacă şi numai dacă $xy < 1$.

9. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi funcţia $f : I \to \mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că:

$$f(x) + f(y) \leq 2f\left(\frac{x + y}{2}\right),\ (\forall)\, x, y \in I.$$

Mai mult,

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right),\ (\forall)\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in I,$$

n fiind o putere a lui 2.

b) Aplicând proprietatea de la punctul precedent pentru numerele x_1, x_2, $\ldots$, x_n, x_{n+1}, $\ldots$, x_{n+k}, unde

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{n+k} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2},$$

iar $n + k$ este o putere a lui 2, să se deducă valabilitatea proprietăţii pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Folosind proprietatea de la punctul precedent pentru funcţia logaritmică, să se deducă relaţia dintre media aritmetică şi media geometrică a n numere pozitive.

PROFESORI II

1. Trei cercuri egale care au un punct comun H se mai intersectează două câte două în punctele A, B, C. Să se demonstreze că şi cercul circumscris triunghiului $\triangle ABC$ este egal cu cercurile date.

2. Să se determine parametrul m din ecuaţia

$$x - 1 = m + \sqrt{x^2 + 2(m+2)x + 4(m+1)}$$

astfel încât aceasta să aibă soluţii în $\mathbb{R}$.

3. Pentru 9 m de postav şi 5 m stofă s-au plătit 1950 lei. Pentru 3 m de postav şi 7 m stofă de acelaşi fel s-a plătit 1290 lei. Cât costă 1 m de postav şi 1 m stofă? (Rezolvare aritmetică)

DEFINITIVAT 1976
PROFESORI II

1. Legea de compoziţie $x \top y = xy - 5x - 5y + 30$ determină pe $\mathbb{R}$ o structură de grup? Dar pe $\mathbb{R} \setminus \{5\}$?

2. Să se demonstreze că $(1+X)^{6m+1} - (1+X)^{6p+1}$ se divide cu $X^2 + X + 1$, unde $m, p \in \mathbb{N}$.

3. Pe laturile hexagonului regulat înscris în cercul de rază R se construiesc în exteriorul său pătrate şi se unesc cu vârfurile lor vecine.

a) Să se arate că formează un dodecadon regulat.

b) Să se calculeze aria dodecagonului în funcţie de R.

c) Să se calculeze aria cercului înscris şi aria cercului circumscris dodecagonului.

DEFINITIVAT 1977
PROFESORI II

1. Să se găsească soluţiile reale ale sistemului:

$$\begin{cases} xyz + x = 4 \\ xyz + y = 3 \\ xyz + z = 2 \end{cases}.$$

2. Să se transforme în produs expresia

$$E = \frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{b}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{c}{\sin^2 \frac{C}{2}}$$

unde a, b, c, A, B, C sunt elementele unui triunghi.

3. Perimetrul unui trapez isoscel circumscris unui cerc este de 56 cm, iar unghiul sub care se vede baza mare din centrul cercului este de 120°. Să se calculeze laturile trapezului.

(Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un patrulater oarecare să admită un cerc înscris este ca suma a două laturi opuse să fie egală cu suma celorlalte două laturi).

4. Se dă un con circular drept cu diametrul bazei de 12 cm şi înălţimea egală cu $\frac{2}{3}$ din diametru.

- **a)** Să se afle aria laterală, aria totală şi volumul conului.
- **b)** Se desfăşoară suprafaţa laterală a conului obţinându-se un sector de cerc. Câte grade are unghiul acestui sector?
- **c)** La ce distanţă de vârful conului trebuie făcută o secţiune printr-un plan paralel cu baza astfel ca lungimea cercului de secţiune să fie 9π cm?

DEFINITIVAT 1978
PROFESORI II

1. **a)** Să se afle x, y dacă $xy = 2(x + y) = 18$.

b) Să se arate că dacă $x \geq 2$, $y \geq 2$, atunci $xy \geq x + y$.

2. **a)** Să se arate că numerele $i(1 - i)^2$ şi $(1 + i\sqrt{3})^3$ sunt reale.

b) Să se verifice prin inducţie că:

$$1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1} = \frac{nz^{n+1} - (n+1)z^n + 1}{(z-1)^2}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Ce se deduce pentru $z = i$ şi $n = 100$, separând părţile reală şi imaginară?

3. **a)** Să se rezolve ecuaţia $\sin x \sin 3x + 1 = 0$.

b) Să se arate că dacă $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\sin\alpha + \cos\alpha \leq \sqrt{2}$ şi $\tan\alpha + \cot\alpha \geq 2$.

4. Se consideră un triunghi echilateral ABC. Pe segmentele AB şi AC se iau respectiv punctele M şi N astfel încât $AM = NC$. Fie P punctul de intersecţie a dreptelor BN şi CM. Să se calculeze unghiul $\sphericalangle BPC$ şi să se arate că $\text{aria}[BPC] = \frac{1}{3}\text{aria}[ABC]$.

DEFINITIVAT 1979
PROFESORI II

1. **a)** Să se stabilească o aplicaţie bijectivă a mulţimii $\mathbb{Z}$ pe mulţimea $\mathbb{N}$.

b) Să se definească toate tripletele de numere reale (x, y, z) astfel încât $x + y + z = 2$ şi $2xy - z^2 = 4$.

2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x^4 + 4 = (x^2 + ax + 2)(x^2 - ax + 2),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi apoi să se reprezinte în planul complex rădăcinile ecuaţiei $x^4 + 4 = 0$.

3. Să se arate că o condiţie necesară şi suficientă ca două plane să fie paralele între ele este ca orice dreaptă care intersectează unul dintre plane (într-un singur punct) să-l intersecteze şi pe celălalt. Deduceţi tranzitivitatea relaţiei de paralelism între plane.

DEFINITIVAT 1980
PROFESORI II

1. Analiza combinatorie. Binomul lui Newton. Definiţii, demonstraţii, aplicaţii posibile.

2. Să se arate că numărul

$$n = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

este întreg.

3. Să se verifice că pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$ nenule, ecuaţia

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1$$

are rădăcini reale.

4. Se consideră un triunghi echilateral ABC. Să se determine dreapta (Δ) care trece prin punctul A, pentru care suma distanţelor de la B şi C este maximă.

5. Pe un cerc se iau punctele A, B nediametral opuse. Tangentele în A şi B la cerc se intersectează în C, iar paralela prin A la BC intersectează din nou cercul în D; fie E intersecţia dreptei CD cu cercul $(E \neq D)$. Să se arate că AE trece prin mijlocul segmentului BC.

DEFINITIVAT 1981
PROFESORI I

1. Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, fie funcţia $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_a(x) = \left(x_1 + ax_2 + \frac{a^2}{2}, x_2 + a\right)$, $(\forall)\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Arătaţi că:

- **a)** $f_a \circ f_b = f_{a+b}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbb{R}$.
- **b)** Mulţimea $G = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ formează grup în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.
- **c)** Grupul $(G, \circ)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$.

2. Să se arate că

$$\arcsin \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} - x,\ x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

3. Fie $(\mathscr{C})$ un cerc, d o dreaptă şi A un punct pe dreapta d. Construiţi un cerc $(\mathscr{C}^*)$ tangent la cercul $(\mathscr{C})$ şi la dreapta d în punctul A.

4. Determinaţi funcţia polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grad minim care să aibă un maxim egal cu 6 în $x = 1$ şi un minim egal cu 2 în $x = 3$.

5. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât, pentru $0 < a < b$, să aibă loc relaţia $f(x) \in [a, b]$, pentru orice $x \in [0, 1]$. Să se arate că

$$\int_0^1 f(x)\ dx + ab \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq a + b.$$

PROFESORI II

1. Se consideră polinoamele $P_1(X) = X^3 + X^2 - 2X$ şi $P_2(X) = X^3 + 5X^2 + 8X + 4$.

- **a)** Să se descompună $P_1(X)$ şi $P_2(X)$ în factori de gradul întâi.
- **b)** Dacă $n \geq 1$ este un număr natural, fie $N_1 = P_1(n)$ şi $N_2 = P_2(n)$. Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor N_1 şi N_2. Să se arate că $d \geq 6$.

2. Se consideră funcţiile $f(x) = x^2 - 4x \cos 2\alpha + 5$ şi $g(x) = \ln f(x)$, unde α este un parametru real.

- **a)** Să se arate că funcţia g este definită pe $\mathbb{R}$.
- **b)** Să se determine valorile parametrului α pentru care funcţia f are o valoare minimă egală cu 4.

3. Într-un cerc cu centrul O se înscrie patrulaterul convex $ABCD$. Mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA se notează respectiv cu M, N, P, Q, iar simetricele lui O faţă de aceste puncte sunt respectiv M', N', P', Q'.

- **a)** Să se arate că patrulaterele $MNPQ$ şi $M'N'P'Q'$ sunt paralelograme.
- **b)** Să se determine lungimile laturilor paralelogramelor $MNPQ$ şi $M'N'P'Q'$ în funcţie de AC şi BD.
- **c)** Fie $\{O'\} = MP \cap NQ$ şi $\{O''\} = M'P' \cap N'Q'$. Să se arate că punctele O, O', O'' sunt coliniare şi că $OO' = O'O''$.
- **d)** Să se arate că

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot S_{M'N'P'Q'}.$$

- **e)** Să se afle locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de punctele A, B, C, D.

DEFINITIVAT 1982
PROFESORI I

1. Definiţii echivalente pentru limita unei funcţii într-un punct.

2. Să se arate că grupurile multiplicative $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ nu sunt izomorfe.

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = a$, $x_1 = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ daţi) şi $x_n = \frac{2}{5}x_{n-1} + \frac{3}{5}x_{n-2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se determine expresia lui x_n în funcţie de a, b, n şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Să se traseze graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2e^{nx} + \sin x}{x^2e^{nx} + 1}$.

5. Se consideră un plan P raportat la un sistem ortogonal de axe xOy. Fie $f : P \to P$ aplicaţia de rotaţie în jurul punctului O cu unghiul $\frac{\pi}{4}$ şi $g : P \to P$ aplicaţia de simetrie în raport cu axa Ox. Să se arate că $f \circ g \neq g \circ f$ şi să se determine punctele $M \in P$ astfel încât $f(g(M)) = g(f(M))$.

PROFESORI II

1. Progresii aritmetice şi progresii geometrice.

2. Să se rezolve inecuaţia $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} \leq 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

3. Să se arate că dacă a, b, c sunt numere reale şi $a + b + c = 0$, atunci $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

4. Să se afle valorile parametrului real m astfel încât ambele rădăcini ale polinomului $X^2 - 2mX - 1$ să fie reale şi cuprinse în intervalul $[-2, 2]$.

5. Fie un triunghi ABC astfel încât $m(\sphericalangle BAC) = 90°$ şi $|AB| = |AC| = b$. Se consideră punctele D, $E \in (BC)$ astfel încât $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle EAC$. Să se calculeze lungimea segmentului DE.

DEFINITIVAT 1983
PROFESORI II

1. Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică.

2. Să se rezolve ecuaţia $x + \sqrt{x} \leq 6$.

3. Să se afle x dacă $\log_2(\log_{\frac{1}{3}} x) < 0$.

4. Fie un triunghi ABC astfel încât $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $||AB|| = c$, $||AC|| = b$. Fie D, $E \in [BC]$ astfel încât $||BD|| = ||DE|| = ||EC||$. Să se calculeze lungimile segmentelor $[AD]$ şi $[AE]$ în funcţie de b şi c.

DEFINITIVAT 1984
PROFESORI II

1. Să se demonstreze că

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

(Pentru a găsi sume de combinări ”din p în p”, $C_n^0 + C_n^p + C_n^{2p} + \ldots$, se însumează binoame de forma $(1+z_k)^n$, unde z_k este rădăcina de ordin p a unităţii pentru $0, 1, \ldots, p-1$).

2. Să se rezolve: $\log_a x + \log_a(x+5) + \log_a 0,02 < 0$.

3. Să se arate că pentru $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$, polinomul $X^{5a} + X^{5b+1} + X^{5c+2} + X^{5d+3} + X^{5e+4}$ este divizibil prin $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

4. În tetraedrul $SABC$ muchiile opuse sunt egale două câte două. Dacă $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, să se găsească volumul tetraedului.

5. Dacă într-un tetraedru feţele laterale au ariile egale, atunci muchiile opuse sunt congruente două câte două.

DEFINITIVAT 1985
PROFESORI II

1. Să se rezolve ecuaţia $(x+4)3^x - x = (x+1)|3^x - 1| + 3^{x+1} + 1$.

2. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în care $AB \perp AD$, $AB \perp BC$. Notăm cu I punctul de intersecţie a diagonalelor trapezului. Se consideră o dreaptă d care trece prin I şi este paralelă cu bazele AD şi BC. Această dreaptă d intersectează pe AB în E. Să se arate că $[EI$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle CED$.

3. Fie a, b, c trei numere strict pozitive. Să se arate că

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

În ce caz avem egalitate?

DEFINITIVAT 1986
PROFESORI II

1. **a)** Să se arate că polinomul $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ$ se divide cu $X + Y + Z$.

b) Să se rezolve în numere întregi ecuaţia $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{dacă } x < 0 \\ bx, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$, unde a, $b \in \mathbb{R}$. Să se determine a şi b astfel încât f să fie bijectivă şi în acest caz să se calculeze f^{-1} şi $f \circ f$.

3. **a)** Să se găsească toate punctele M din planul triunghiului ABC cu proprietatea că ariile triunghiurilor MAB, MBC şi MCA sunt egale.

b) Să se arate că printre punctele M de la punctul a) există unul care nu aparţine interiorului triunghiului ABC şi care are proprietatea că perimetrele triunghiurilor MAB, MBC şi MCA sunt egale dacă şi numai dacă triunghiul ABC este dreptunghic.

DEFINITIVAT 1987
PROFESORI II

1. Fie A o mulţime nevidă şi $\mathscr{P}(A)$ mulţimea părţilor sale. Se consideră o funcţie $f : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ cu proprietatea

$$\forall\, X, Y \in \mathscr{P}(A),\ X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y).$$

Se notează cu T intersecţia tuturor mulţimilor $X \in \mathscr{P}(A)$ pentru care $f(X) \subset X$. Să se arate că $f(T) = T$.

2. Să se arate că unul din numerele $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$, $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ este raţional iar celălalt este iraţional.

3. Fie $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ două cercuri secante în A şi B, de centru O_1, respectiv O_2, de raze diferite. Se notează cu P_1P_2 respectiv Q_1Q_2 tangentele comune celor două cercuri (P_1, $Q_1 \in \mathscr{C}$; P_2, $Q_2 \in \mathscr{C}_2$) şi cu M_1, M_2 mijloacele segmentelor P_1Q_1, respectiv P_2Q_2.

Să se arate că:

a) triunghiul M_1AM_2 este isoscel;

b) AM_2 este bisectoarea unghiului $O_1'AO_2$, unde O_1' este simetricul lui O_1 faţa de AB;

c) unghiurile M_1AM_2 şi O_1AO_2 sunt congruente.

DEFINITIVAT 1988
PROFESORI I

1. **a)** Funcţii continue pe intervale compacte.

b) Continuitatea uniformă.

2. Fie K un corp comutativ şi $K^* = K \setminus \{0\}$. Să se arate că grupurile $(K, +)$ şi $(K^*, \cdot)$ nu sunt izomorfe.

3. Să se arate că $\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!(C_n^k)^3 = n! \cdot C_{2n}^n$.

4. Pe feţele unui tetraedru regulat de muchie x se construiesc în exterior patru piramide cu feţele laterale triunghiuri isoscele congruente. Suprafaţa laterală a corpului astfel format fiind constantă, egală cu $a^2\sqrt{3}$, să se exprime în funcţie de a şi x volumul corpului.

5. Fiind dată elipsa $(\mathscr{E})$ raportată la axele ei de simetrie, cu axa mare egală cu $\sqrt{10}$ şi tangentă dreptei $3x+8y-17=0$, se cere:

a) Ecuaţia elipsei.

b) Coordonatele punctului de tangenţă.

PROFESORI II

1. **a)** Radicali în corpul numerelor reale; proprietăţi ale radicalilor.

b) Funcţia exponenţială.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt[5]{x+\sqrt{x^2+32}} + \sqrt[5]{x-\sqrt{x^2+32}} = 2$.

3. Să se arate că $\sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot\ ldots \cdot \sqrt[n]{n} \leq \frac{(n+1)!}{2^n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

4. Să se arate că triunghiul $\triangle ABC$ în care $\frac{a+c}{b} = \cot \frac{B}{2}$ este dreptunghic.

5. Fie $VABC$ un tetraedru căruia i se desfac feţele laterale şi se aşează prin rotaţie în planul bazei (ABC). Se formează în planul bazei triunghiurile BCV_A, ACV_B, ABV_C. Dacă VA', VB', VC' sunt înălţimile feţelor laterale pe laturile BC, AC, respectiv AB, atunci dreptele V_AA', V_BB' şi V_CC' sunt concurente.

DEFINITIVAT 1989
PROFESORI I

1. Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue.

2. Să se determine soluţiile reale ale sistemului:

$$\begin{cases} y^3 + z^3 + 3\sqrt[3]{2}yz = 2 \\ x^3 + z^3 + 3\sqrt[3]{3}xz = 3 \\ x^3 + y^3 + 3mxy = m^3 \end{cases},$$

unde $m \in \mathbb{R}$.

3. **a)** Fie P_1, P_2, P_3 un triunghi în planul α şi $f : \alpha \to \alpha$ o izometrie. Să se demonstreze că dacă $f(P_i) = P_i$, $i = 1, 2, 3$, atunci $f(M) = M$, pentru orice punct M din planul α.

b) Se consideră un tetraedru $[ABCD]$ în care $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$. Să se demonstreze că

$$||AC||^2 + ||BD||^2 = ||CD||^2 + ||AB||^2 = ||BC||^2 + ||AD||^2.$$

PROFESORI II

1. Binomul lui Newton.

2. Să se arate că $7^{2n} - 1$ este divizibil cu 48 pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. Fie A, B, C, D patru puncte în plan, astfel încât $AB = CD$. Să se afle locul geometric al lui M din plan pentru care triunghiurile MAB şi MCD au aceeaşi arie.

4. Se consideră un tetraedru $[A_1A_2A_3A_4]$. Fie A_1', A_2', A_3', A_4' proiecţiile ortogonale ale vârfurilor pe planele feţelor opuse. Proiecţiile ortogonale ale unui punct variabil M din interiorul tetraedrului pe feţele lui se notează M_1, M_2, M_3, M_4. Să se arate că:

$$\frac{||MM_1||}{||A_1A_1'||} + \frac{||MM_2||}{||A_2A_2'||} + \frac{||MM_3||}{||A_3A_3'||} + \frac{||MM_4||}{||A_4A_4'||} = 1.$$

DEFINITIVAT 1990
BUCUREŞTI

PROFESORI I

1. **a)** Noţiunea de integrală a unei funcţii.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}-n}{\ln n}$.

2. **a)** Noţiunea de izomorfism de grupuri.

b) Să se arate că grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ nu sunt izomorfe.

3. **a)** Să se arate că dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte secante dintr-un plan, atunci ea este perpendiculară pe plan.

b) Fie o elipsă de focare A şi B. Să se găsească punctele M de pe elipsă pentru care măsura unghiului $\sphericalangle AMB$ este maximă.

PROFESORI II

1. Să se construiască o funcţie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$:

a) injectivă şi nesurjectivă;

b) surjectivă şi neinjectivă.

2. **a)** Mica teoremă a lui Fermat (demonstraţie).

b) Să se arate că:

(i) $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$;

(ii) dacă $u_n=C_n^1-\dfrac{1}{2}C_n^2+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^n$, atunci $u_n-u_{n-1}=\dfrac{1}{n}$.

3. **a)** Să se arate că proiecţiile unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi pe laturile triunghiului sunt trei puncte coliniare.

b) Să se arate că există trei romburi care să aibă vârfurile pe muchiile unui tetraedru.

TIMIŞOARA

PROFESORI I

1. **a)** Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă cu derivata strict monotonă şi $c \in (a, b)$ cu $f'(c) = 0$. Atunci există $x_0 \in [a, b]$ cu $x_0 \neq a$ şi $f(x_0) = f(a)$ sau $x_0 \neq b$ şi $f(x_0) = f(b)$.

b) Reprezentaţi grafic funcţia $f(x) = \dfrac{1}{|x^2 - a^2| + |x^2 - b^2|}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ cu $0 < a < b$.

c) Fie P un polinom cu proprietatea că pe intervalul $[a, b]$ avem $\int_a^b x^n P(x)\ dx = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. Atunci $P(x) = 0$.

2. **a)** Să se demonstreze inegalitatea

$$\lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg n < n \lg \frac{n+1}{2}$$

folosind:

(i) metoda inducţiei matematice;

(ii) inegalitatea mediilor.

b) Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$. Să se arate că polinoamele f şi g au rădăcina comună $x_0 = 1$, ştiind că $f(X^3) + Xg(X^3)$ este divizibil cu $X^2 + X + 1$.

3. **a)** Prin una din laturile bazei unei piramide triunghiulare regulate se duce un plan perpendicular pe muchia opusă. Dacă muchia laterală are lungimea a, iar latura bazei x, se cere:

(i) aria secţiunii obţinute;

(ii) dacă a este constant şi x variabil, să se determine x pentru care volumul piramidei este maxim;

(iii) să se determine unghiul diedru format de planul secţiunii cu planul bazei.

b) Să se demonstreze că există un punct unic cu proprietatea că lungimile laturilor sale sunt trei numere naturale consecutive şi unul din unghiuri are măsura egală cu dublul măsurii altui unghi al său.

PROFESORI II

1. **a)** Să se arate că pentru orice număr natural impar a există un număr $b \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^b - 1$ se divide cu a.

b) Să se determine numerele de forma abc pentru care $\sqrt{abc} = ab - \sqrt{c}$.

c) Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{\log_{a^4} x - 1} + \sqrt[3]{\log_{a^2} x - 10} + \sqrt{\log_{\sqrt{x}} a - 1} + 2 = 0.$$

d) Să se demonstreze că

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

e) Să se discute în funcţie de parametrul $m \in \mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x + m} = |2x - 1|$.

2. Se dă trapezul $ABCD$ în care $AD \parallel BC$ şi $AB = AD = DC$, $AB = a$, $BC = 2a$, $AC \cap BD = \{O\}$. În O se ridică perpendiculara pe planul trapezului pe care se ia $SO = \dfrac{a}{2}$.

a) Să se arate că unghiurile ascuţite ale trapezului au fiecare $60°$ şi că $AC \perp AB$ şi $BD \perp DC$.

b) Să se arate că triunghiul SAB este dreptunghic.

c) Să se determine măsura unghiului format de planul (SAD) cu planul trapezului.

d) Prin mijlocul lui $[SO]$ se duce un plan paralel cu planul trapezului care intersectează segmentele SA, SB, SC, SD respectiv în punctele A_1, B_1, C_1, D_1. Să se calculeze volumul trunchiului de piramidă obţinut prin eliminarea corpului $SA_1B_1C_1D_1$ în funcţie de volumul piramidei iniţiale.

IAŞI

PROFESORI I

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} (-x^3 - x^5 - \ldots - x^{2n-1}), & \text{dacă } |x| < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3} + \ldots + \dfrac{1}{x^{2n-1}}\right), & \text{dacă } |x| > 1 \end{cases}$. Se cere:

a) să se arate că $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ şi să se construiască graficul funcţiei f;

b) să se calculeze $\lim\limits_{x\nearrow 1} \left[(1-x)\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\right]$

2. **a)** Să se descompună în factori ireductibili peste corpul $\mathbb{R}$ polinomul $P = Z^{2n} - 2Z^n \cos t + 1$, $t \in [0, 2\pi)$ şi să se dea o interpretare geometrică mulţimii soluţiilor ecuaţiei $P(z) = 0$.

b) Pe mulţimea $G = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 0 \le x \le a,\ a \in \mathbb{N}^*\}$ se defineşte operaţia

$$x \star y = \begin{cases} x+y, & \text{dacă } x+y < a \\ x+y-a, & \text{dacă } x+y \ge a \end{cases}.$$

Să se arate că $(G, \star)$ este un grup abelian şi că aplicaţia $f : \mathbb{Z} \to G$, care asociază fiecărui număr întreg x restul r_x al împărţirii $x : a$, este un morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, +)$ şi $(G, \star)$.

3. Fie $P_1P_2\ldots P_n$ un poligon regulat cu n laturi, $n \ge 3$.

a) Să se arate că acest poligon este inscriptibil.

b) Fie un reper în planul poligonului cu originea O în centrul cercului circumscris poligonului şi pentru care $P_1(1,0)$. Să se determine coordonatele celorlalte vârfuri ale poligonului.

c) Să se arate că mulţimea afixelor z_k ale punctelor P_k în reperul ales formează un subgrup al grupului multiplicativ $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

d) Să se calculeze aria poligonului regulat $P_1'P_2'\ldots P_n'$, unde P_k' este determinat astfel încât $OP_kP_k'P_{k+1}$ să fie romb, $k = \overline{1,n}$ (unde $P_{n+1} = P_1$).

e) Să se calculeze volumul V_n al piramidei $SP_1P_2\ldots P_n$, unde S este un punct determinat prin condiţiile $SO = OP_1$ şi $SO \perp (P_1P_2\ldots P_n)$.

f) Să se arate că şirul (V_n) este convergent şi să se interpreteze geometric limita sa.

PROFESORI II

1. Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{a + 2\sqrt{a-1}}{a - 2\sqrt{a-1}}$ şi $x_1 - x_2 = \dfrac{4\sqrt{a-1}}{a-2}$.

a) Să se scrie ecuaţia de gradul al doilea cu rădăcinile x_1 şi x_2.

b) Să se determine valorile lui a pentru care x_1, $\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}$, x_2 sunt în progresie aritmetică.

c) Se consideră mulţimile A, B, $C \subseteq \mathbb{N}^*$ date prin:

$$A = \{x \,|\, x = 3n - 2,\ n \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{x \,|\, x = 1003 - 2m,\ m \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{x \,|\, x = 6p + 1,\ p \in \mathbb{N},\ p \le 167\}.$$

Să se arate că $A \cap B = C$.

2. Fie paralelogramul $ABCD$ având diagonala AC mai lungă sau egală cu diagonala BD. Fie E şi F proiecţiile punctului C pe dreptele AB şi respectiv AD. Să se demonstreze că:

a) are loc relaţia $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$ şi să se interpreteze rezultatul când paralelogramul este dreptunghi;

b) triunghiurile AEC şi EFC au aceeaşi arie dacă şi numai dacă paralelogramul este dreptunghi sau elementele lui satisfac o relaţie ce trebuie precizată.

CRAIOVA

PROFESORI I

1. **a)** Fie $M \neq \varnothing$ şi $\mathscr{P}(M) = \{X \mid X \subset M\}$, iar A, $B \in \mathscr{P}(M)$. Se consideră funcţia $f\mathscr{P}(M) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$, $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Să se demonstreze că:

(i) f este injectivă $\iff A \cup B = M$;

(ii) f este surjectivă $\iff A \cap B = \varnothing$;

(iii) f este bijectivă $\iff A = C_M B$. În acest caz se cere f^{-1}.

b) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$$

şi să se deducă de aici că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n+1} + \sin\frac{1}{n+2} + \ldots + \sin\frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

c) Teorema lui Lagrange (enunţ, demonstraţie).

2. Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se arate că mulţimea $K^* = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K \;\middle|\; a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$ are o structură de grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor şi $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K^* \;\middle|\; a^2 + b^2 = 1 \right\}$ este subgrup al lui K^*.

b) Să se arate că mulţimea K are structură de corp comutativ în raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire a matricelor, izomorf cu $\mathbb{C}$.

3. **a)** Să se calculeze unghiul dintre două muchii opuse ale unui tetraedru în funcţie de lungimile muchiilor tetraedrului.

b) Să se demonstreze că, dacă într-un tetraedru ariile feţelor sun egale, atunci fiecare muchie este congruentă cu muchia opusă.

PROFESORI II

1. Fie M o mulţime finită, iar $n(M)$ numărul elementelor sale. Să se demonstreze că dacă A, B, C sunt mulţimi finite, atunci

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C).$$

2. **a)** Cel mai mare divizor comun a două numere naturale. Algoritmul lui Euclid.

b) Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$.

3. Fie O, A, B, C patru puncte în spaţiu astfel ca $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ şi se notează cu $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$.

a) Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ABC în funcţie de a, b, c.

b) Să se arate că

$$\sigma[ABC]^2 = \sigma[OAB]^2 + \sigma[OBC]^2 + \sigma[OAC]^2.$$

c) Să se arate că proiecţia ortogonală a punctului O pe planul (ABC) este ortocentrul H al triunghiului ABC.

d) Să se calculeze distanţa OH în funcţie de a, b, c.

DEFINITIVAT 1991
BUCUREŞTI

PROFESORI I

1. **a)** Derivabilitate. Proprietăţi ale funcţiilor derivabile.

b) Fie $f : [-3, \infty) \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{x}, & \text{dacă } x \in [-3, -2) \\ x^2 & \text{dacă } x \in [-2, 2) \\ \dfrac{10}{x^2}, & \text{dacă } x \in [2, \sqrt{5}] \\ 2, & \text{dacă } x \in (\sqrt{5}, \infty) \end{cases}.$$

Să se determine punctele de extrem local ale acestei funcţii.

c) Fie $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, 2) \\ \ln x, & \text{dacă } x \geq 2 \end{cases}$, iar $x_1 = a \in \mathbb{R}_+$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Să se arate că (x_n) este convergent şi să se calculeze limita sa.

2. **a)** Polinoame ireductibile. Caracterizarea polinoamelor ireductibile din $\mathbb{R}[X]$ şi $\mathbb{C}[X]$. Să se arate că există o infinitate de polinoame ireductibile neasociate, cu coeficienţi într-un corp.

b) Se consideră funcţiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 + 2, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} x + \sqrt{2}, & \text{dacă } x \text{ este algebric} \\ x^3 + \sqrt{3}, & \text{dacă } x \text{ este transcendent} \end{cases}.$$

Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea acestor funcţii.

c) Să se arate că pentru orice $f \in \mathbb{R}[X]$ cu $\text{grad}(f) = n$, există $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, unici, astfel încât $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(X^i + 1)$.

3. **a)** Descompunerea unei izometrii într-un produs de simetrii.

b) Să se construiască o dreaptă care să intersecteze două drepte date şi să fie perpendiculară pe o altă dreaptă dată.

c) Să se găsească distanţa dintre parabola $\mathscr{P} : y^2 = 2x$ şi dreapta $d : x - y + 1 = 0$.

PROFESORI II

1. **a)** Numere prime. Descompunerea unui număr natural în factori primi. Unicitatea descompunerii.

b) Să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor $2k - 1$ şi $9k + 4$ în funcţie de numărul întreg k.

c) Să se găsească cel mai mic număr natural strict mai mare ca 5, care împărţit prin 6, 8, 9, 12 să dea acelaşi rest 5.

2. **a)** Inelul claselor de resturi modulo n. Determinaţi divizorii lui zero şi elementele inversabile pentru $n = 18$.

b) Să se determine numărul real a astfel încât ecuaţia $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0$ să aibă toate rădăcinile reale.

c) Rezolvaţi ecuaţia $x + 2^x + \log_2 x = 7$.

3. **a)** Inversiuni în plan.

b) Lungimea muchiilor unui cub este a. Să se afle distanţa dintre o diagonală a cubului şi o diagonală a feţelor laterale cu care nu se intersectează.

c) Să se calculeze aria poligonului regulat $ABC\ldots M$ înscris în cercul de rază R, ştiind că

$$\frac{1}{||AB||} = \frac{1}{||AC||} + \frac{1}{||AD||}.$$

TIMIŞOARA

PROFESORI I

1. Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se definească noţiunea de limită a funcţiei f în x_0 şi apoi să se prezinte ce condiţie trebuie să satisfacă x_0 şi unde intervine această condiţie în definiţie.

b) Să se demonstreze că dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$, atunci:

(i) $(\exists)\ V \in \mathscr{V}(x_0)$ astfel încât $f(x) \in \mathbb{R}^*$, $(\forall)\ x \in V \cap D \backslash \{x_0\}$;

(ii) $\lim\limits_{\substack{x \in V \cap D \\ x \to x_0}} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{L}$.

2. Fie funcţiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definite prin $f_m(x) = (x^2 + mx)e^{-x}$ şi
$g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ x^3, & \text{dacă } x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) pentru orice $m \in \mathbb{R}$, funcţia f_m are un maxim şi un minim local;

b) $g([0,1])$ este un interval, deşi g nu are proprietatea lui Darboux.

3. **a)** Să se definescă noţiunile de grup şi omomorfism de grupuri.

b) Fie $f : G_1 \to G_2$ un morfism de grupuri. Atunci:

(i) $f(e_1) = e_2$, unde e_k este elementul unitate în G_k, $k = 1, 2$.

(ii) $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$, $(\forall)\ x \in G_1$.

c) Să se arate că mulţimile Ker f şi Im f sunt subgrupuri.

4. **a)** Să se arate că:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

b) Să se rezolve şi să se discute sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

în funcţie de parametri reali a, b, c, d.

5. Fie tetraedrul $ABCD$ cu $AB \perp (BCD)$. Considerăm un punct $M \in (AB)$ şi notăm cu E, F proiecţiile ortogonale ale lui M pe AC, respectiv AD. Să se demonstreze că:

a) patrulaterul $ECDF$ este inscriptibil;

b) triunghiul MEF este echilateral dacă şi numai dacă $||AC|| = ||AB||$ şi $\dfrac{||CB||}{||AB||} = \dfrac{||CD||}{||AD||}$.

PROFESORI II

1. Se consideră mulţimea polinoamelor cu coeficienţi complecşi.

a) Să se definească relaţia de divizibilitate şi noţiunea de cel mai mare divizor comun pentru polinoamele acestei mulţimi.

b) Să se arate că dacă $f \mid g$ şi $g \mid f$ atunci există $a \in \mathbb{C}$ cu $f = ag$.

c) Să se demonstreze că pentru orice două polinoame arbitrare există cel mai mare divizor comun al lor.

2. **a)** Metoda reducerii la absurd.

b) Să se enunţe şi să se demonstreze teorema privitoare la intersecţia a două cercuri. Să se precizeze locurile unde este utilizată metoda reducerii la absurd.

c) **(i)** Să se arate că:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

(ii) Să se determine numerele reale a, b, c încât sistemul

$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ x + y + az + t = -1 \\ x - y + z + bt = c \end{cases}$$

să fie compatibil, iar matricea sistemului să aibă rangul 2.

d) **(i)** Să se determine rădăcinile reale şi complexe ale ecuaţiei $x^6 = 1$.

(ii) Să se demonstreze că mulţimea acestor rădăcini constituie un grup cu operaţia produs din corpul $\mathbb{C}$.

(iii) Să se determine subgrupurile grupului precedent.

3. **a)** Se consideră o dreaptă d şi un punct $A \notin d$. Să se demonstreze, fără a utiliza axioma lui Euclid, că în planul (A, d) există o unică dreaptă a astfel încât $A \in a$, $a \perp d$, $a \cap d = \{P\}$.

b) Se consideră n puncte arbitrare A_1, A_2, ..., A_n aparţinând planului euclidian. Să se demonstreze că aceste puncte sunt coplanare dacă şi numai dacă există cel puţin un punct M încât sferele de diametre $[A_1M]$, $[A_2M]$, ..., $[A_nM]$ să se intersecteze într-un punct $N \neq M$.

IAŞI

PROFESORI I

1. **a)** Să se arate că $0 \leq t - \arctan t \leq \dfrac{t^3}{3}$, pentru orice $t \geq 0$.

b) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea în origine a funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\arctan t}{t}\, dt, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca ecuaţia $x(x-1)(x-2)(x-3) = m$ să aibă toate rădăcinile reale.

3. **a)** Fie piramida triunghiulară $SABC$, $A' \in (SA$, $B' \in (SB$, $C' \in (SC$. Să se arate că:

$$\frac{\mathscr{V}[SA'B'C']}{\mathscr{V}[SABC]} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$

b) Fie piramida $SABCD$ cu baza paralelogramul $ABCD$. Prin vârful A şi prin mijlocul K al segmentului (SC) se consideră un plan ce intersectează segmentul (SB) în M şi segmentul (SD) în N. Notând cu W volumul piramidei $SAMKN$ şi cu V volumul piramidei $SABCD$, să se arate că

$$\frac{1}{3} \leq \frac{W}{V} \leq \frac{3}{8}.$$

c) Cercul celor nouă puncte (Euler); definiţie, caracterizare geometrică.

PROFESORI II

1. **a)** Să se determine n şi x dacă în dezvoltarea $\left(3^{\frac{x}{2}} + 3^{\frac{1-x}{2}}\right)^n$ suma coeficienţilor primilor trei termeni este 22, iar suma dintre termenul al treilea şi termenul al cincilea este 420.

b) Fie a, b, $c \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că

$$(a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a) \cdot [a, b, c] = a \cdot b \cdot c \cdot (a, b, c).$$

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}^2$ sistemul:

$$\begin{cases} |x| + y = 2 \\ |x-1| - y = -1 \end{cases}.$$

2. **a)** Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle A) = 40°$, $m(\sphericalangle B) = 60°$. Fie D şi E pe laturile AC şi AB respectiv, pentru care $m(\sphericalangle CBD) = 40°$ şi $m(\sphericalangle BCE) = 70°$, iar $BD \cap CE = \{F\}$. Să se demonstreze că $AF \perp BC$.

b) Să se arate că unind mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru se obţin trei drepte concurente în punctul de intersecţie al dreptelor ce unesc vârfurile tetraedrului cu centrele de greutate ale feţelor opuse.

CRAIOVA

PROFESORI I

1. **a)** Fie S mulţimea tuturor şirurilor de numere reale. Pentru $x,\ y \in S$ se defineşte

$$x \star y = x(0)y(n) + x(1)y(n-1) + \ldots + x(n-1)y(1) + x(n)y(0).$$

Să se arate că:

(i) $(S, \star)$ este un monoid comutativ;

(ii) $x \star y = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ sau $y = 0$;

(iii) dacă şirurile $x,\ y \in S$ converg la a respectiv b, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(x \star y)(n)}{n+1} = a \cdot b$.

b) Fie $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Se cere:

(i) să se arate că pentru orice $x > 0$, există $\theta(x) \in (0,1)$ astfel încât $f(x) - f(0) = xf'(x\theta(x))$;

(ii) să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \theta(x)$.

2. Fie $P \in \mathbb{Z}[X]$ cu grad $P \geq 1$.

a) Fie $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, cu $(a,b) = 1$, o rădăcină a lui P. Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$, numărul $a - mb$ divide $P(m)$.

b) Să se arate că dacă $x_1,\ x_2 \in \mathbb{Z}$ cu $x_1 \neq x_2$ şi $|P(x_1)| = |P(x_2)| = 1$, $|x_1 - x_2| > 2$, atunci P nu are nicio rădăcină raţională.

3. Fie $M_1,\ M_2,\ M_3$ puncte diferite de pe elipsa

$$\mathscr{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

astfel încât centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$ să coincidă cu centrul elipsei. Să se demonstreze că normalele la elipsă în vârfurile triunghiului sunt concurente.

PROFESORI II

1. **a)** Partea întreagă a unui număr real; definiţie. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\sqrt[3]{1234}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $x^3 - [x] = 3$.

2. Să se arate că:

a) $\sqrt[3]{2}$ este un număr iraţional;

b) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow a = b = c = 0.$

3. **a)** Să se demonstreze, folosind axiomatica lui Hilbert, că oricare ar fi punctele A şi B, există un punct C situat între A şi B.

b) În punctul variabil M interior bazei unei piramide triunghiulare regulate se ridică o perpendiculară pe planul bazei. Aceasta intersectează planele feţelor laterale în trei puncte: M_1, M_2, M_3. Să se arate că suma $MM_1 + MM_2 + MM_3$ este constantă.

CLUJ-NAPOCA

PROFESORI I

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = ax + b$ cu $a,\, b \in \mathbb{R}$. Să se determine:

a) $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $a,\, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f \circ f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$.

2. Fie $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b,\, a, b \in \mathbb{R},\, a \neq 0\}$. Să se arate că:

a) $(A, \circ)$ este un grup.

b) Funcţia $\varphi : A \to \mathbb{R}^*$ definită prin $\varphi(f) = a$, dacă $f(x) = ax + b$, este un morfism al grupului $(A, \circ)$ în grupul $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

3. Se dă piramida regulată $SABCD$ cu baza de latură a şi muchia $SA = 2a$. Fie M mijlocul lui (SB). Să se calculeze $\sigma[DAMC]$, volumul piramidei $MABC$, aria totală şi volumul piramidei $SABCD$.

PROFESORI II

1. Fie $a,\, b,\, c \in \mathbb{Z}$ numere impare. Să se arate că ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ nu are rădăcini raţionale.

2. Să se generalizeze problema anterioară pentru ecuaţiile de grad $2n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Să se arate că într-un triunghi ABC, diametrul AA' al cercului circumscris triunghiului se intersectează cu dreapta HD într-un punct situat pe cercul circumscris triunghiului, unde H este ortocentrul, iar D mijlocul laturii (BC).

BRAŞOV

PROFESORI I

1. **a)** Integrala Riemann, integrabilitate, criterii.

b) Să se studieze derivabilitatea funcţiei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

2. Să se arate că polinomul $P(X) = (X+1)^2(X+2)^2 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

3. Probleme de distanţă în geometria euclidiană.

PROFESORI II

1. **a)** Corpul numerelor complexe.

b) Se consideră mulţimile A, B, $C \subseteq \mathbb{N}^*$ date prin:

$$A = \{x \,|\, x = 3n - 2,\ n \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{x \,|\, x = 1003 - 2m,\ m \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{x \,|\, x = 6p + 1,\ p \in \mathbb{N},\ p \leq 167\}.$$

Să se arate că $A \cap B = C$.

2. **a)** Transformări izometrice: translaţia, rotaţia, simetria.

b) Să se cerceteze existenţa unui punct M din planul triunghiului ABC astfel încât

$$\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle BMC.$$

DEFINITIVAT 1992
PROFESORI I

1. **a)** Exemple şi contraexemple în predarea noţiunii de şir convergent.

b) Să se arate că funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\[2ex] 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$$

nu este monotonă în niciun interval I care conţine numărul real 0.

c) Să se determine $t\in\mathbb{R}$ pentru care

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x+t\cos x|\,dx=1.$$

2. Fie $p\geq 5$ un număr prim. Se defineşte prin recurenţă şirul (x_n) astfel: $x_0\in\mathbb{Z}_p\backslash\{\hat{0},\hat{1}\}$ şi $x_{n+1}=1-\dfrac{1}{x_n}$, pentru $n\geq 0$.

a) Să se arate că şirul este bine definit şi satisface condiţia $x_{n+3}=x_n$, pentru orice $n\geq 0$.

b) Folosind eventual punctul precedent, să se discute în funcţie de p, dacă ecuaţia $x^2-x+1=0$ are rădăcini în $\mathbb{Z}_p$.

3. Fie Γ un arc şi A, B două puncte pe Γ astfel încât AB să nu fie diametru în cerc. Dreapta variabilă d care trece prin A intersectează cercul în U, iar dreapta d', paralelă cu d şi care trece prin B, intersectează cercul în V. Să se determine locul geometric al intersecţiei dreptelor AV şi BU.

PROFESORI II

1. Fie $P(X)=a_0+a_1X+\ldots+a_{14}X^{14}$ polinomul definit prin $P(X)=(3X^2-X-2)^7$. Se cere:

a) Să se calculeze $S_1=\sum\limits_{k=0}^{14}a_k$, $S_2=\sum\limits_{k=0}^{7}a_{2k}$, $S_3=\sum\limits_{k=0}^{6}a_{2k+1}$.

b) Să se arate că $a_7=2^7\sum\limits_{k=0}^{7}(C_7^k)^2\left(-\dfrac{3}{2}\right)^k$.

c) Să se determine toate numerele întregi n pentru care $P(n)$ este divizibil cu 3.

d) Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=P(x)$.

2. **a)** Să se găsească numere întregi n pentru care $\dfrac{2n+3}{5n+1}$ este număr întreg.

b) Fie $P=a_0X^n+a_1X^{n-1}+\ldots+a_n$ un polinom de grad $n\geq 2$, cu coeficienţi reali.

(i) Presupunând că a_0, a_1, …, a_n sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice, cu primul termen a_0 şi raţia $q>0$, să se rezolve ecuaţia $P(x)=0$.

(ii) Să se arate că pentru $n\in\mathbb{N}^*$ şi $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ au loc relaţiile:

$$1+\cos\frac{2k\pi}{n+1}+\cos\frac{4k\pi}{n+1}+\ldots+\cos\frac{2nk\pi}{n+1}=0,$$

$$1+\sin\frac{2k\pi}{n+1}+\sin\frac{4k\pi}{n+1}+\ldots+\sin\frac{2nk\pi}{n+1}=0.$$

3. **a)** Utilizarea demonstraţiei prin reducere la absurd în rezolvarea problemelor de geometrie. Exemple.

b) Prin diagonala AC a bazei unui cub $ABCDA'B'C'D'$ de latură a se duce un plan care face cu planul bazei (ABC) unghiul α.

(i) Să se exprime aria secţiunii făcute în cub, în funcţie de a şi α.

(ii) Să se determine α astfel încât raportul volumelor celor două corpuri în care este împărţit cubul prin planul de secţiune să fie egal cu $\dfrac{1}{2}$.

DEFINITIVAT 1993
TIMIŞOARA

PROFESORI I

1. **a)** Metodica predării noţiunii de derivată a unei funcţii.

b) Să se reprezinte grafic funcja

$$f:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x\in(0,2\pi]\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}.$$

2. Fie $G=\left\{A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\,|\,A=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}\right\}$. Pe G se defineşte legea ”$\star$” dată prin

$$A\star B=A\cdot B+\alpha\cdot B\cdot A+\beta(A+B+I_3),$$

unde $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

Se consideră ipotezele:

(P_1) $a\neq-2,\ \alpha=0,\ \beta=2$;

(P_2) $\alpha=1,\ \beta=0$

şi concluziile:

(Q_1) legea este neasociativă şi comutativă;

(Q_2) $(G,\star)$ este grup;

(Q_3) elementul neutru faţă de legea dată este $E=\dfrac{1}{2}I_3$;

(Q_4) aplicaţia $f:G\to\mathbb{R}^*,\ f(A)=\det(A+2I_3)$ este un morfism surjectiv al grupului $(G,\star)$ pe grupul multiplicativ al numerelor reale.

Se cere să se stabilească valoarea de adevăr pentru implicaţiile $(P_i)\Longrightarrow(Q_j)$, $i\in\{1,2\}$, $j\in\{1,2,3,4\}$.

3. În planul euclidian, într-un sistem de axe ortogonale xOy, se consideră punctele $A(2,0)$, $B(0,1)$ şi $P\in Oy$ arbitrar.

a) Fie B' simetricul lui B faţă de origine şi punctele $A'\in(OA)$, $Q\in(AP)$ mijloace; se notează $BQ\cap Ox=\{R\}$. Să se arate că paralela prin R la Oy, OQ şi $A'B'$ sunt concurente.

b) Cercul $\mathscr{C}$ care trece prin origine şi este tangent dreptei AP în A, intersectează a doua oară axa Oy în S. Să se determine locul geometric al intersecţiei tangentei în O la cercul $\mathscr{C}$ cu o paralelă prin S la Ox.

PROFESORI II

1. Să se arate că $x=\sqrt[3]{3a+4+(a+4)\sqrt{a+1}}-\sqrt[3]{-3a-4+(a+4)\sqrt{a+1}}$ este un număr natural pentru orice $a\in(-1,\infty)$.

2. Fie $S=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\log_a\left(\log_{\frac{1}{b}}\dfrac{1}{x}\right)\le\log_{\frac{1}{a}}(\log_b x)\}$, unde $a,\ b\in(0,\infty)\setminus\{1\}$.

Se consideră ipotezele:

(P_1) $a,\ b\in(0,1)$;

(P_2) $a,\ b\in(1,\infty)$;

(P_3) $a\in(0,1)$ şi $b\in(1,\infty)$

şi concluziile:

(Q_1) $S=[b,\infty)$;

(Q_2) $S = \emptyset$;

(Q_3) $S = (0, b]$;

(Q_4) $S = (1, b]$;

(Q_5) $S = [b, 1)$.

Se cere să se stabilească valoarea de adevăr pentru implicaţiile $(P_i) \Longrightarrow (Q_j)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3. Două dreptunghiuri situate în plane diferite au o latură comună AB.

a) Demonstraţi că există o sferă $\mathscr{S}(O, R)$ care conţine toate cele şase vârfuri ale celor două dreptunghiuri.

b) Fie $ABCD$ unul dintre dreptunghiuri şi cercul $\mathscr{C}'(O', R') = \mathscr{S} \cap (ABCD)$. Stabiliţi relaţia $OO'^2 = R^2 - R'^2$.

c) Fie AT tangenta în A la cercul $\mathscr{C}'$. Demonstraţi că AT este situată în planul tangent în A la sfera $\mathscr{S}$.

4. Metodica rezolvării ecuaţiilor algebrice cu coeficienţi reali, de grad mai mic sau egal cu 3.

BUCUREŞTI
PROFESORI II

1. Să se rezolve ecuaţia

$$2x^3 - 3ax^2 + (a^2 + b)x - a = 0,\ a \in \mathbb{R},$$

în cazurile $b = 1$ şi $b = 2$.

2. Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{Z}$ fracţia $\dfrac{3n+1}{n+2}$ este reductibilă?

3. Arătaţi că în triunghiul ABC are loc:

$$m(\widehat{A}) = 2 \cdot m(\widehat{B}) \Longleftrightarrow a^2 = b(b+c).$$

4. Perpendicularitate în spaţiu (drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe plan, plane perpendiculare).

5. Tratarea noţiunii de funcţie în şcoala generală şi în liceu.

BRAŞOV
PROFESORI II

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 - x - 1}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathrm{Im}(f) \subset [-3, 2]$.

b) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = 2$ are două rădăcini reale negative.

2. Demonstraţi că:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{2n-1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \,\vdots\, 17$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. Asemănarea triunghiurilor. Linii importante în triunghi. Să se arate că triunghiul în care înălţimea şi mediana împart un unghi în trei unghiuri congruente este dreptunghic.

CRAIOVA
PROFESORI II

1. Cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun în mulţimea numerelor întregi. Definiţii. Exemple. Proprietăţi. Metode de calcul. Aspecte metodice.

2. Fie a, $b \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 3x + 2| + |x - a| + |x - b|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine valorile lui a şi b pentru care $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$.

b) Pentru $a = b = c$ să se reprezinte graficul funcţiei f.

3. Fie A', B', C' picioarele înălţimilor unui triunghi oarecare ABC şi H ortocentrul triunghiului.

a) Să se arate că AA', BB', CC' sunt bisectoarele triunghiului $A'B'C'$.

b) Să se arate că

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'.$$

c) Dacă punctele B şi C sunt fixe iar A este variabil astfel încât $\sphericalangle BAC$ are măsura constantă, să se determine poziţiile punctului A pentru care triunghiul ABC are perimetrul maxim.

CLUJ
PROFESORI II

1. Unei sfere de rază r i se circumscrie un con circular drept. O secţiune axială a conului are unghiul la vârf de măsură 2θ. Pentru ce valoare a lui θ volumul conului este minim? Cât este valoarea acestui volum minim?

2. Se consideră ecuaţia $x^2 + px + q = 0$, unde p, $q \in \mathbb{Z}$. Fie x_1, x_2 rădăcinile ei.

a) Să se arate că dacă x_1 şi x_2 sunt raţionale, atunci ele sunt întregi.

b) Fie $A = \{a + bx_1 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{a + bx_2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că $A = B$.

c) Să se demonstreze că $(A, +, \cdot)$ este un inel comutativ cu element unitate.

d) Fie $n : A \to \mathbb{Z}$ funcţia definită prin $n(a + bx_1) = (a + bx_1)(a + bx_2)$. Să se arate că

$$n((a + bx_1)(c + dx_1)) = n(a + bx_1) \cdot n(c + dx_1).$$

e) Să se arate că $a + bx_1$ este inversabil în inelul $(A, +, \cdot)$ dacă şi numai dacă $|n(a + bx_1)| = 1$.

3. Teorema directă şi teorema reciprocă (definiţie). Exemplificaţi şi demonstraţi teorema celor trei perpendiculare.

DEFINITIVAT 1994
TIMIŞOARA

PROFESORI I

1. **a)** Enunţaţi şi demonstraţi teorema creşterilor finite a lui Lagrange.

b) Să se arate că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctan} \dfrac{x^2-1}{x\sqrt{2}}, & \text{dacă } x > 0 \\[2ex] -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{dacă } x = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctan} \dfrac{x^2-1}{x\sqrt{2}} - \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a unei funcţii f care se cere a fi determinată.

c) Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă cu $f(x) = x$, $(\forall)\ x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

2. **a)** Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Rezolvaţi inecuaţia $\log_a x + \log_{a^2} x + \log_{a^4} x > \dfrac{7}{4}$.

b) Daţi un exemplu de inel $(A, +, \cdot)$ pentru care funcţia $f : A \to A$, $f(a) = a^3$, $(\forall)\ a \in A$, satisface pe rând una dintre condiţiile:

- **(i)** f nu este injectivă;
- **(ii)** f nu este surjectivă;
- **(iii)** f este bijectivă.

3. **a)** Se consideră un triunghi neisoscel ABC. Bisectoarea exterioară corespunzătoare unghiului A intersectează dreapta BC în A'. Analog se obţin B' şi C'. Arătaţi că A', B' şi C' sunt coliniare.

b) Pe laturile unui triunghi ABC se consideră punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ şi $C' \in (AB)$ astfel încât AA', BB' şi CC' să fie concurente în P. Arătaţi că $\dfrac{A'P}{AA'} + \dfrac{B'P}{BB'} + \dfrac{C'P}{CC'} = 1$.

4. Metodica predării sistemelor de ecuaţii liniare de două ecuaţii cu două necunoscute.

PROFESORI II

1. **a)** Să se determine numerele naturale n pentru care $2^n \leq n^3$.

b) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \star y = x + y - xy$. Să se arate că mulţimea $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ cu operaţia indusă este grup comutativ.

c) Să se scrie în ordine crescătoare numerele $A = \log_{10} 13$, $B = \log_{10}^2 12$, $C = \log_{10}^3 11$.

2. **a)** Fie ABC un triunghi oarecare şi $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$. Arătaţi că afirmaţiile următoare sunt echivalente:

- **(i)** perpendicularele în A_1, B_1, C_1 pe laturile $[BC]$, $[AC]$, respectiv $[AB]$ sunt concurente;
- **(ii)** $A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + B_1A^2 + C_1B^2$.

b) Fie $ABCD$ un tetraedru cu muchiile opuse perpendiculare. Arătaţi că înălţimile tetraedrului sunt concurente.

3. Metodica predării sistemelor de ecuaţii liniare de două ecuaţii cu două necunoscute.

IAŞI

PROFESORI I

1. **a)** Să se arate că $0 < \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) < \frac{1}{k \ln k}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n \ln n} \right)$.

2. Să se rezolve inecuaţia $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} \leq 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

3. Pe laturile triunghiului oarecare ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABC', CAB', BCA'. Să se arate că:

a) Cercurile circumscrise acestor triunghiuri echilaterale se intersectează într-un punct I.

b) Dreptele AA', BB', CC' sunt concurente în T.

c) $AA' = BB' = CC' = TA + TB + TC$.

4. Aspecte metodice privind predarea noţiunii de inel. Exemple de inele comutative şi de inele necomutative.

PROFESORI II

1. Fie trinomul $T(x) = (2m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 2$, cu $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$. Să se determine m astfel ca:

a) $T(x)$ să aibă o valoare minimă strict pozitivă.

b) $T(x) < 0$ pentru orice $x \in [1, 2)$.

2. Se consideră un unghi APB înscris într-un cerc şi Q un punct de pe cerc situat în interiorul unghiului APB. Să se demonstreze că:

a) $PQ \geq \min\{PA, PB\}$.

b) Dacă centrul cercului se află în exteriorul unghiului APB, atunci are loc şi inegalitatea $PQ \leq \max\{PA, PB\}$.

3. Dacă a, b, c sunt trei numere reale strict pozitive, atunci $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$.

4. Aspecte metodice privind predarea teoremei împăr ţirii cu rest a numerelor întregi.

CRAIOVA

PROFESORI I

1. Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că şirul (I_n) este convergent.

b) Să se găsească o relaţie de recurenţă pentru termenii şirului (I_n) şi cu ajutorul ei să se calculeze I_n pentru $n \in \mathbb{N}$.

c) Să se calculeze suma

$$S_n = 1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{2n+1}.$$

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc operaţiile $x \star y = x + y + 2$ şi $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}, \star, \circ)$ este un domeniu de integritate.

b) Să se determine elementele inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}, \star, \circ)$.

c) Să se arate că inelele $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{Z}, \star, \circ)$ sunt izomorfe.

d) Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sistemul $\begin{cases} x^2 \star y^2 = 7 \\ x^2 \circ y^2 = 16 \end{cases}$.

3. Se dă coarda fixă AB în cercul $\mathscr{C}$. Se ia un punct mobil M pe cercul $\mathscr{C}$ şi se notează cu Q punctul pentru care $[MB] \equiv [MQ]$, punctele A, M, Q sunt coliniare şi M este situat între A şi Q. Se cere locul geometric al punctului Q când M parcurge $\mathscr{C}$.

4. Aspecte metodice privind predarea capitolului ”*Şiruri de numere reale. Convergenţă*”

PROFESORI II

1. Fie funcţiile

$$f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}},$$

$$g : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 2, & \text{dacă } x \in [1,2] \\ 2\sqrt{x-1}, & \text{dacă } x \in (2, \infty) \end{cases}.$$

a) Să se arate că $f = g$.

b) Să se studieze monotonia şi să se traseze graficul funcţiei f.

c) Dacă $A = \{f(x) \,|\, x \in [1,2]\}$ şi $B = \{f(x) \,|\, x \in (1, \infty)\}$, să se determine $A \cup B$ şi $A \cap B$.

2. Se dă un cerc şi A un punct exterior. Ducem AT şi AS tangente la cerc, S şi T pe cerc. Coarda TL este paralelă cu AS. Segmentul AL taie a doua oară cercul în Q.

a) Demonstraţi că TQ întâlneşte tangenta AS în M, mijlocul ei.

b) Fie P piciorul perpendicularei din S pe TL. Demonstraţi că ariile patrulaterelor $PLSM$ şi $PTAM$ sunt egale.

3. Fie $OABC$ un tetraedru în care $OA \perp OB \perp OC$ şi H piciorul perpendicularei din O pe planul (ABC). Să se arate că:

a) H este ortocentrul triunghiului ABC.

b) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

c) Dacă $OH = \frac{990\sqrt{30001}}{30001}$ cm, să se afle volumul tetraedrului $OABC$ ştiind că muchiile OA, OB, OC sunt exprimate în centimetri prin numere naturale consecutive.

4. Funcţia liniară. Funcţia de gradul al doilea. Definiţii, proprietăţi. Aspecte metodice.

BRAŞOV
PROFESORI II

1. Fie o sferă de rază r înscrisă într-un con circular drept înscris la rândul său într-un cilindru (bazele se suprapun, înălţimile sunt congruente). Dacă notăm prin α unghiul dintre generatoarea conului şi planul bazei, să se determine α astfel încât cele trei corpuri să aibă volumele în progresie geometrică.

2. Într-un patrulater $\mathscr{L}_1$ unim mijloacele laturilor consecutive obţinând patrulaterul $\mathscr{L}_2$ şi în acelaşi mod obţinem patrulaterul $\mathscr{L}_3$ din $\mathscr{L}_2$.

- **a)** Cum este $\mathscr{L}_1$ dacă $\mathscr{L}_3$ este dreptunghi?
- **b)** Cum este $\mathscr{L}_1$ dacă $\mathscr{L}_3$ este romb?
- **c)** Cum este $\mathscr{L}_1$ dacă $\mathscr{L}_3$ este pătrat?
- **d)** Cum este $\mathscr{L}_1$ dacă pe lângă condiţia de la c) este şi inscriptibil?

3. Grup, subgrup. Grupul rădăcinilor complexe de ordinul n ale unităţii.

4. Teorema directă, contrară, reciprocă, contrara reciprocei.

BUCUREŞTI
PROFESORI II

1. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, cel mai mare divizor comun al numerelor $2n+7$ şi $3n+2$ divide 17. Determinaţi numerele întregi n pentru care $(2n+7, 3n+2) = 17$.

2. Fie A',B', C' punctele de tangenţă ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile BC, CA, respectiv AB. Demonstraţi că AA', BB', CC' sunt concurente.

3. Teorema lui Euler.

4. Aspecte metodice privind predarea teoremei lui Thales.

CLUJ
PROFESORI II

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{dacă } x < 1 \\ x^2+1, & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$ Este funcţia f injectivă? Dar surjectivă?

2. Se dau punctele A, B şi C într-un plan. Să se determine locul geometric al punctelor P din spaţiu cu proprietatea

$$m(\widehat{PAC}) = m(\widehat{PBC}) = 90°.$$

3. Subiect metodic. Daţi exemple de rezolvare aritmetică a unei probleme prin metoda:

a) falsei ipoteze;

b) figurativă;

c) mersului invers.

DEFINITIVAT 1995
TIMIŞOARA

PROFESORI I

1. Se consideră şirul (x_n) definit prin $x_0 = m \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = e^{x_n} - 1 - \frac{x_n^2}{2} - \frac{x_n^3}{6}$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \int_1^2 \frac{dt}{1 + |t - x|}$. Se cere:

- **a)** Să se studieze convergenţa în $\mathbb{R}$ şi respectiv în $\overline{\mathbb{R}}$ a şirului (x_n).
- **b)** Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.
- **c)** Să se arate că f este primitivabilă pe $\mathbb{R}$ şi orice primitivă a lui f este strict crescătoare.

2. Se consideră polinoamele $f \in \mathbb{Z}_{25}[X]$, $g \in \mathbb{C}[X]$, $h \in \mathbb{R}[X]$ definite prin $f = \hat{8}X^2 - \hat{7}X - \hat{1}$, $g = X^4 - 5X + 1$, $h = X^3 + aX^2 + bX + c$. Se cere:

- **a)** Să se determine rădăcinile polinomului f.
- **b)** Să se arate că rădăcinile lui g au modulele mai mici decât 2 şi trei dintre acestea au modulele mai mari decât 1.
- **c)** Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ astfel ca înmulţirea numerelor complexe să determine pe mulţimea $G = \{z \in \mathbb{C} \mid h(z) = 0\}$ o structură de grup.

3. Fie un plan raportat la un sistem de coordonate carteziene ortogonale xOy. Pentru fiecare număr $t \in \mathbb{R}$ se consideră perechea de drepte (d'_t, d''_t) de ecuaţii

$$d'_t : x\cos t + y - 1 = 0,$$
$$d''_t : x - y\cos t - 1 = 0$$

şi punctul $M_t = d'_t \cap d''_t$.

- **a)** Să se determine locul geometric al punctului M_t pentru $t \in \mathbb{R}$ şi să se precizeze dacă punctul O aparţine locului geometric respectiv.
- **b)** Să se arate că fiecare dintre dreptele d'_t, d''_t conţine câte un punct fix, A respectiv B, iar patrulaterul OAM_tB este inscriptibil pentru orice $t \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se calculeze $\min\limits_{t\in\mathbb{R}} |OM_t|$ şi $\max\limits_{t\in\mathbb{R}} |OM_t|$ şi să se precizeze pentru ce valori ale lui t aceste valori extreme sunt atinse.

4. Exemple şi contraexemple în predare şi învăţare.

PROFESORI II

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{dacă } x > 0 \\ x - b, & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}$. Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât:

- **a)** graficul funcţiei f să treacă prin origine;
- **b)** f să fie injectivă;
- **c)** f să fie surjectivă;
- **d)** f să fie bijectivă.

2.
- **a)** Restul împărţirii polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ prin $X^3 - 3$ este egal cu pătratul câtului. Să se afle acest rest ştiind că $f(1) + f(-1) + 5 = 0$.
- **b)** Să se determine numărul elementelor mulţimii

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2mx + m = 0\} \cap [1, \infty),$$

unde $m \in \mathbb{R}$.

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$.

a) Să se arate că planele $AB'D'$ şi $BC'D$ intersectează diagonala cubului AC' sub un unghi drept şi determină pe aceasta trei segmente congruente.

b) Dacă M, N, P sunt proiecţiile punctului A respectiv pe $A'B$, $A'C$, $A'D$, atunci să se afle raportul ariilor suprafeţelor triunghiulare MNP şi $BC'D$.

c) Să se calculeze volumul trunchiului de piramidă $BC'DMNP$.

4. Exemple şi contraexemple în predare şi învăţare.

CRAIOVA

PROFESORI I

1. Fie $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \displaystyle\int_0^{\arctan x} \ln(1 + \tan t)\, dt$. Să se calculeze:

- **a)** $f(0)$ şi $f(1)$;
- **b)** $f'(x)$ pentru $x \geq 0$;
- **c)** $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx$.

2. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care polinomul $(X-1)^n - X^n + 1$ se divide cu $X^2 - X + 1$.

3. Fie M un punct arbitrar pe latura BC a paralelogramului $ABCD$, iar N un punct arbitrar pe segmentul AM. Să se arate că triunghiurile DMN şi BCN au aceeaşi arie.

4. Aspecte metodice privind predarea capitolului "*Funcţii continue*".

PROFESORI II

1. Fie $M \neq \emptyset$ şi A, B, $X \in \mathscr{P}(M)$. Dacă $A \cup X = B \cup X$ şi $A \cap X = B$, să se arate că $A = B$.

2. Fie x, y, $z \in \mathbb{Z}$ astfel ca

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz. \tag{1}$$

- **a)** Să se arate că numerele x, y, z sunt pare.
- **b)** Să se deducă de aici că singurul triplet (x, y, z) de numere întregi care verifică (1) este tripletul $(0, 0, 0)$.

3. Într-un triunghi ABC având toate unghiurile ascuţite, iar înălţimea AD egală cu baza BC, se construieşte, pe CD ca latură, pătratul $CDEF$ şi pe BD ca latură, pătratul $BDGH$ (ambele pătrate fiind situate de aceeaşi parte a dreptei BC). Să se arate că dreptele AD, BF şi CH sunt concurente. Se vor trata ambele cazuri de situare a pătratelor $CDEF$ şi $BDGH$ în raport cu dreapta BC.

4. Aspecte metodice privind predarea capitolului "*Paralelogramul*".

BUCUREŞTI
PROFESORI II

1. Să se rezolve ecuaţia

$$\log_2(x^2+5x-2)^2+\log_4(x^2+5x-2)=5.$$

2. Să se descompună în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$ şi $\mathbb{R}[X]$ polinomul $X^6+X^5+X^4+X^2+X+1$.

3. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{Z}$, fracţia $\dfrac{n^2+n-1}{2n^2+3n-1}$ este ireductibilă.

4. Fie un cerc fix, pe el punctele fixe B şi C şi punctul mobil A. Găsiţi locul geometric al ortocentrului triunghiului ABC.

5. Teorema celor trei perpendiculare şi reciprocele ei.

CLUJ
PROFESORI II

1. Să se determine polinoamele $f(x)$ de gradul doi cu coeficienţi raţionali, pentru care $f(n) \in \mathbb{Z}$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

2. Să se arate că pentru orice a, $b \in \mathbb{Z}$, $30 \mid ab(a^4 - b^4)$.

3. Metodica asemănării triunghiurilor.

IAŞI
PROFESORI II

1. Fie $P(X) = (2x^2 - x - 3)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se arate că $P(-3x+1) \geq P(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se determine $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $P(n)$ este divizibil cu $P(11)$.

2. Pe laturile unui triunghi ABC se consideră punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$.

- **a)** Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente într-un punct P, atunci are loc relaţia

$$\frac{B'A}{B'C} + \frac{C'A}{C'B} = \frac{PA}{PA'}.$$

- **b)** Dacă $\dfrac{AC'}{C'B} + \dfrac{AB'}{B'C} = 1$, atunci BB' şi CC' se intersectează pe linia mijlocie a triunghiului ABC.

3. Cel mai mare divizor comun a două numere naturale (abordare ştiinţifică şi metodică).

DEFINITIVAT 1996
TIMIŞOARA

PROFESORI I

1. Fie V un spaţiu liniar, de dimensiune 3, peste corpul comutativ K şi $\{x_1, x_2, x_3\}$ o bază în V.

a) Dacă $K = \mathbb{R}$, sistemele de vectori $\{x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1\}$ şi $\{x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3\}$ formează baze ale spaţiului V? Dar dacă $K = \mathbb{Z}_2$? (Justificaţi răspunsul)

b) În cazul $K = \mathbb{Z}_p$, dacă $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}$ este matricea aplicaţiei liniare $f : V \to V$, determinaţi numărul prim p astfel încât f să nu fie izomorfism.

2. **a)** Să se arate că $(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$, $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(1 - \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^n}\right)$.

3. Fie (AB), (CD) două diametre perpendiculare ale unui cerc $\mathscr{C}$ cu centrul O şi M un punct de pe arcul AC. Proiecţiile ortogonale ale punctelor C şi D pe AM se notează cu P respectiv cu P', iar proiecţiile pe BM se notează cu Q respectiv cu Q'. Demonstraţi că:

a) Punctele O, P, Q sunt situate pe o dreaptă d, iar punctele O, P', Q' sunt situate pe o dreaptă d'.

b) Dreapta d este perpendiculară pe dreapta d'.

4. Metodica predării funcţiilor continue.

PROFESORI II

1. **a)** Să se arate că pentru orice număr natural n, numărul $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ este divizibil cu 7.

b) Fie n, $p \in \mathbb{N}^*$, p număr prim. Să se arate că $\frac{\sigma(p^n)}{p^n} < \frac{p}{p-1}$, unde $\sigma(p^n)$ este suma divizorilor naturali ai lui p^n.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}^*$ definim operaţia "$\star$" în felul următor:

$$a \star b = \begin{cases} a \cdot b, & \text{dacă } a > 0 \\ \frac{a}{b}, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}.$$

a) Este $(\mathbb{R}^*, \star)$ un grup? (Justificaţi răspunsul)

b) Determinaţi elementul $x \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a \star x \star a = b$.

3. Două dreptunghiuri situate în plane diferite au o latură comună AB.

a) Demonstraţi că există o sferă $\mathscr{S}(O, R)$ care conţine toate cele şase vârfuri ale celor două dreptunghiuri.

b) Fie $ABCD$ unul dintre dreptunghiuri şi cercul $\mathscr{C}'(O', R') = \mathscr{S} \cap (ABCD)$. Stabiliţi relaţia $OO'^2 = R^2 - R'^2$.

4. Metodica predării noţiunii de funcţie.

DEFINITIVAT 2001

BUCUREŞTI

1. **a)** Fie f_0, f_1, ..., f_n polinoame din $\mathbb{C}[X]$ astfel încât grad $f_i = i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Să se arate că dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f \leq n$, atunci există în mod unic numerele complexe λ_0, λ_1, ..., λ_n astfel încât

$$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n.$$

b) Fie $(\mathbb{Q}, +)$ grupul aditiv al numerelor raţionale şi $(S_n, \circ)$ grupul permutărilor de gradul n. Să se determine morfismele de grupuri $f : (\mathbb{Q}, +) \to (S_n, \circ)$.

2. **a)** Să se studieze semnul funcţiei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x - x$.

b) Fie $x_0 > 0$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul definit prin $x_{n+1} = x_n^2 \cdot \arctan \dfrac{1}{x_n} \cdot$ Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi să i se calculeze limita.

3. Se consideră în plan un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ şi o dreaptă d exterioară cercului. Să se găsească locul geometric al centrelor cercurilor tangente la cercul $\mathscr{C}(O, r)$ şi dreapta d.

4. Schema binomială (Bernoulli).

5. Funcţii derivabile: consideraţii teoretice şi metodice.

Se vor trata următoarele chestiuni: definiţii echivalente, interpretare geometrică, exemple, legătura cu funcţiile continue.

DEFINITIVAT 2002
PROFESORI I

TIMIŞOARA

1. **a)** Fie P mulţimea numerelor naturale prime, iar $A_7 = \{p \in P \,|\, p + 7 \text{ este divizibil cu } 3\}$ şi $A_{11} = \{p \in P \,|\, p + 11 \text{ este divizibil cu } 3\}$. Determinaţi $A_7 \cap A_{11}$ şi $A_7 \cup A_{11}$.

b) Fie $a,\, b \in \mathbb{Z}$ fixate şi $G_{a,b} = \{au + bv \,|\, u, v \in \mathbb{Z}\}$.

(i) Arătaţi că $G_{a,b}$ împreună cu adunarea numerelor întregi formează un grup comutativ.

(ii) Este grupul $(G_{a,b}, +)$ izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}, +)$ pentru orice $a,\, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$?

(iii) Coincide $(G_{7,11}, +)$ cu grupul aditiv $(\mathbb{Z}, +)$?
Justificaţi răspunsurile.

c) Determinaţi patru numere întregi x_1, y_1, x_2, y_2 astfel încât $x_1 + y_1 = 100 = x_2 + y_2$ şi $y_1 + y_2 = 11$, numerele x_1 şi x_2 să fie divizibile cu 7, iar numerele y_1 şi y_2 să fie divizibile cu 11. Problema admite mai multe soluţii?

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x - x$. Arătaţi că:

a) f este strict descrescătoare şi bijectivă.

b) $f(x) + \dfrac{x^3}{6} \geq 0$, $(\forall)\ x \geq 0$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + f\left(\dfrac{2}{n^2}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{n}{n^2}\right) \right] = 0.$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\, dx \geq -\frac{1}{18}.$

3. Planificarea activităţii didactice pentru tema: ”*Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic*”.

DEFINITIVAT 2004

PLOIEŞTI
Varianta 1

1. Proiectaţi lecţia cu tema: ”*Teorema de existenţă a primitivelor pentru funcţii continue*”.

2. Proiectaţi lecţia cu tema: ”*Funcţia arctangentă*”.

3. Legăturile dintre înmulţirea matricelor şi compunerea aplicaţiilor liniare.

4. Să se discute şi să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} mx - 3y + 4z = 1 \\ 5x + (m-1)y - 4z = 8 \\ x + (m+5)y - 12z = 10 \end{cases},$$

unde $m \in \mathbb{R}$.

5. **a)** Stabiliţi o relaţie de recurenţă pentru calculul integralei

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$$

şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

b) Să se arate că $e^x \geq x + 1$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

Varianta 2

1. Proiectaţi lecţia cu tema: ”*Interpretări geometrice ale mediilor aritmetică, geometrică şi armonică a două numere pozitive*”.

2. Proiectaţi lecţia cu tema: ”*Funcţia exponenţială*”.

3. Grupuri de permutări.

4. Să se determine numărul real a, astfel încât ecuaţia

$$x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0$$

să aibă toate rădăăcinile reale.

5. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right).$$

6. Să se arate că dintre toate dreptunghiurile cu acelaşi perimetru, pătratul are aria cea mai mare.

Varianta 4

1. Proiectaţi lecţia cu tema: ”*Funcţii injective, funcţii surjective, funcţii bijective*”.

2. Proiectaţi lecţia cu tema: ”*Funcţia arcsinus*”.

3. Inelul claselor de resturi modulo n, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

4. Fie $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, continuă în $x_0 \in (\alpha, \beta)$, cu $f(x_0) \neq 0$. Să se arate că există $r > 0$ astfel încât $f(x) \neq 0$, $(\forall)$ $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \subset (\alpha, \beta)$.

5. Fie $\begin{vmatrix} x-p & q & r \\ r & x-p & q \\ q & r & x-p \end{vmatrix} = 0$, unde p, q, $r \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se calculeze $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

6. Fie triunghiul $\triangle ABC$ şi G centrul său de greutate. Să se demonstreze că:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

Varianta 5

1. Proiectaţi lecţia cu tema: ”*Funcţia logaritmică*”.

2. Proiectaţi lecţia cu tema: ”*Compunerea funcţiilor, funcţii inversabile; definiţii, proprietăţi*”.

3. Inelul claselor de resturi modulo n, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

4. Să se discute şi să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} mx - 3y + 4z = 1 \\ 5x + (m-1)y - 4z = 8 \\ x + (m+5)y - 12z = 10 \end{cases},$$

unde $m \in \mathbb{R}$.

5. Fie $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4}, & \text{dacă } -4 \leq x \leq 0 \\ px + q, & \text{dacă } 0 < x \leq 4 \end{cases}$. Să se determine numerele reale p şi q astfel încât f să fie funcţie Rolle, apoi să se determine punctul $c \in (-4, 4)$ rezultat prin aplicarea teoremei lui Lagrange.

GALAŢI

1. Grupuri şi subgrupuri: definiţie, proprietăţi. Subgrupurile grupului $(\mathbb{Z}, +)$.

2. Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 + x - 2}$, α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, iar D fiind domeniul maxim de definiţie.

- **a)** Să se determine α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, ştiind că f admite asimptota orizontală $y = 0$, trece prin punctul $(-1, 0)$ şi că tangenta la grafic în punctul de abscisă 0 este paralelă cu dreapta de ecuaţie $4y + 3x = 0$.
- **b)** Să se determine aria domeniului mărginit de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x = 2$, $x = 3$.

3. Metodica predării relaţiilor metrice într-un triunghi.

CONSTANŢA

1. **a)** Să se arate că $-1 \leq \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Calculaţi derivata funcţiei $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ pe domeniul maxim de definiţie.

c) Stabiliţi punctele de extrem local şi punctele de inflexiune ale funcţiei anterioare.

d) Trasaţi graficul funcţiei f.

2. **a)** Arătaţi că egalitatea $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$ cu a, b, $c \in \mathbb{Q}$ are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 0$.

b) Mulţimea $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \,|\, a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ se poate înzestra cu o structură de spaţiu vectorial de dimensiune trei peste corpul numerelor raţionale.

3. **a)** Fie triunghiul ascuţitunghic $\triangle ABC$ şi cercul său circumscris $\mathscr{C}$. Să se arate că proiecţiile unui punct $M \in \mathscr{C}$ pe laturile triunghiului $\triangle ABC$ sunt coliniare.

b) Determinaţi măsura unghiului dintre dreapta anterioară, notată d_M, şi dreapta AC în funcţie de arcul $\overset{\frown}{BM}$.

c) Arătaţi că unghiul dintre două drepte, d_M şi $d_{M'}$, cu $M, M' \in \mathscr{C}$, este de măsură $\dfrac{\overset{\frown}{MM'}}{2}$.

4. Concurenţa mediatoarelor şi înălţimilor într-un triunghi (tratare metodică).

5. Funcţii continue pe intervale.

IAŞI
Varianta 1

1. Se consideră funcţia $f : [a, b] \to (a, b)$, $a < b$ şi şirul (a_n) definit prin

$$a_{n+1} = f(a_n),\ a_0 \in [a, b].$$

a) Să se arate că dacă f este crescătoare pe $[a, b]$, atunci şirul (a_n) este convergent şi limita sa, $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, este soluţia ecuaţiei $f(x) = x$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde (a_n) este şirul definit prin

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n),\ a_0 \in (0, 1).$$

2. Fie cercurile $\mathscr{C}_1(A, a)$, $\mathscr{C}_2(B, b)$ cu $AB = d$. Fie $[CD]$ o tangentă exterioară comună ($C \in \mathscr{C}_1$, $D \in \mathscr{C}_2$, punctele A şi B fiind de aceeaşi parte a dreptei CD). Fie $\mathscr{C}_3$ cercul de diametru $[CD]$. Să se precizeze poziţia relativă a dreptei AB faţă de cercul $\mathscr{C}_3$, în funcţie de poziţia relativă a cercurilor $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$.

3. Aspecte metodice privind predarea temei "*Metoda reducerii la absurd*".

Varianta 2

1. Fie p un număr prim şi aplicaţia $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_p[X]$, $\varphi(a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1X + \ldots + \hat{a}_nX^n$, unde $\hat{a}$ este clasa de resturi modulo p a lui $a \in \mathbb{Z}$. Să se arate că:

a) φ este morfism de inele.

b) Dacă $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, $p \neq a_n$ şi $\varphi(f)$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$, atunci f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

c) Polinomul $100X^3 - 27X^2 - 13X + 100$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Să se determine pe laturile sale punctele M, N, P, Q astfel încât $MNPQ$ să fie cel mai mare pătrat posibil.

3. Aspecte metodice în predarea subiectului de analiză matematică ”*Teorema de medie a lui Lagrange*”.

Varianta 3

1. Se consideră inelul claselor de resturi modulo 24, $(\mathbb{Z}_{24}, +, \cdot)$.

a) Să se arate că $(\mathbb{Z}_{24}, +)$ este grup ciclic şi să se determine generatorii.

b) Determinaţi subgrupurile grupului $(\mathbb{Z}_{24}, +)$.

c) Determinaţi grupul elementelor inversabile în inelul $\mathbb{Z}_{24}$.

d) Determinaţi divizorii lui zero din inelul $\mathbb{Z}_{24}$.
Justificaţi răspunsurile.

2. Se dă funcţia $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$.

a) Stabiliţi domeniul maxim de definiţie şi studiaţi variaţia funcţiei f.

b) Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$u_n = \frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n}.$$

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx$.

3. Să se trateze metodic subiectul "*Asemănarea triunghiurilor*" (definiţii, teoreme, cazuri, aplicaţii).

Varianta 4

1. Fie $(\mathbb{Z}, +)$ grupul aditiv al numerelor întregi. Să se arate că:

a) Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci mulţimea $n\mathbb{Z} = \{nk \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ este subgrup al lui $\mathbb{Z}$.

b) Orice subgrup al lui $\mathbb{Z}$ este forma $n\mathbb{Z}$.

c) Dacă $n \in \mathbb{Z}$, atunci funcţia $\varphi_n(x) = nx$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{Z}$, este morfism de grupuri.

d) Orice morfism de grupuri $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ este de tipul de mai sus. Care sunt automorfismele lui $(\mathbb{Z}, +)$?

2. Fie x_0, p, $q > 0$ şi $x_n = \sqrt{px_{n-1} + q}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}$ şi $a > 0$.

3. Aspecte metodice în tratarea subiectului ”*Locuri geometrice*”.

Varianta 5

1. Se dă funcţia $f(a) = a(a+1)\int_0^1 \frac{1}{(1+a)^2 + a^2x^2}\,dx$, $a \neq -1$.

a) Să se calculeze integrala şi să se determine domeniul de definiţie al funcţiei.

b) Să se arate că derivata $f'(a)$ este mărginită.

c) Să se studieze variaţia şi să se traseze graficul funcţiei f.

2. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O şi latură a. Fie E, F, G, H puncte interioare pătratului astfel încât triunghiurile ABE, BCF, CDG, DAH să fie echilaterale.

a) Să se arate că $EFGH$ este un pătrat.

b) Să se afle unghiurile triunghiurilor CDE şi CEO.

c) Să se afle latura pătratului $EFGH$.

3. Algoritmul lui Euclid în $\mathbb{Z}$.

DEFINITIVAT 2005

BUCUREŞTI

1. Fie $d \in \mathbb{Z}$ un număr întreg liber de pătrate (adică $d \neq 0$, $d \neq 1$ şi nu există p număr prim astfel încât $p^2 \mid d$). Notăm

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{x + y\sqrt{d} \mid x, y \in \mathbb{Q}\},$$

$$K_d = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ dy & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Să se arate că:

a) Mulţimea $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ împreună cu adunarea şi înmulţirea numerelor este corp comutativ.

b) Mulţimea K_d împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor este corp comutativ.

c) Corpurile $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ şi K_d sunt izomorfe.

d) Corpurile $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ şi K_3 nu sunt izomorfe.

2. **a)** Să se arate că $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \sin x \leq x$, pentru orice $x > 0$.

b) Folosind punctul anterior, să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \ldots + \sin \frac{n}{n^2} \right).$$

3. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul $\mathscr{C}(O, r)$, cu proprietatea că diagonalele AC şi BD sunt perpendiculare. Notăm cu P intersecţia diagonalelor AC şi BD.

Să se demonstreze relaţiile:

a) $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4r^2$.

b) $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 8r^2$.

4. Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic (tratare metodică).

CONSTANŢA

1. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3 + \cos x}$ şi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

a) Să se verifice că $f(x + 2\pi) = f(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

c) Să se arate că $\dfrac{1}{4} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

e) Să se verifice că $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\dfrac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right)$, $(\forall)$ $x \in [0, \pi)$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

2. a) Să se demonstreze identitatea:

$$\left(\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} \right)^n = \frac{1 + i \tan(n\alpha)}{1 - i \tan(n\alpha)},$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât $\tan \alpha$ şi $\tan(n\alpha)$ au sens.

b) Fie z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ şi $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Să se arate că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

3. Fie a, b, $c \in \mathbb{R}$. Se consideră sistemul de ecuaţii:

$$(S) \quad \begin{cases} \left(a - \frac{1}{2}\right) x + by + cz = 0 \\ cx + \left(a - \frac{1}{2}\right) y + bz = 0 \\ bx + cy + \left(a - \frac{1}{2}\right) z = 0 \end{cases}$$

şi polinomul $f = a - \dfrac{1}{2} + bX + cX^2 \in \mathbb{R}[X]$. Se notează

$$V = \{\alpha = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \text{ soluţie a sistemului } (S)\}.$$

a) Să se arate că V este subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^3$.

b) Pentru $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$, $c = -1$, calculaţi dimensiunea peste $\mathbb{R}$ a lui V.

c) Fie Δ determinantul sistemului (S). Să se arate că $\Delta = f(1)f(\epsilon)f(\epsilon^2)$, unde $\epsilon \in \mathbb{C}$ verifică $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$.

d) Folosind eventual punctul anterior, arătaţi că pentru orice a, b, $c \in \mathbb{Z}$, spaţiul soluţiilor lui (S) este nul.

4. Ecuaţia dreptei în plan (tratare metodică) la nivelul clasei a IX-a. Se vor aborda:

a) Condiţia de coliniaritate pentru 3 puncte din plan.

b) Ecuaţia dreptei determinată de un punct şi de o direcţie dată.

c) Ecuaţia dreptei determinată de două puncte.

d) Ecuaţia generală a dreptei.

e) Formulaţi o problemă referitoare la ecuaţia dreptei în plan. Prezentaţi o metodă de rezolvare, la alegere.

IAŞI
Specializarea: MATEMATICĂ

1. Se dă elipsa de ecuaţie

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0.$$

Fie A, A' punctele de intersecţie ale elipsei cu axa Ox. Tangenta într-un punct variabil M al elipsei intersectează tangentele în A şi A' la elipsă în punctele C, respectiv D. Să se arate că produsul $AC \cdot A'D$ este constant.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^e-e^x$.

a) Precizaţi dacă $x_0=1$, respectiv $x_0=e$ sunt puncte de extrem pentru f.

b) Observând că derivata a patra a funcţiei f păstrează semn constant pe $(0,\infty)$, deduceţi toate punctele de extrem local ale funcţiei f.

3. Să se trateze metodic subiectul "*Funcţii bijective*".

Specializarea: MATEMATICI APLICATE

1. **a)** Considerând eventual funcţia $\ln(\ln x)$, să se arate că, pentru orice număr natural $n \geq 2$ are loc:

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) < \frac{1}{n \ln n}.$$

b) Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

2. Fie $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ două cercuri care se intersectează în punctele A şi B. O secantă variabilă dusă prin punctul A intersectează cercul $\mathscr{C}_1$ în M şi cercul $\mathscr{C}_2$ în N.

a) Să se arate că măsura unghiului $\widehat{MBN}$ este constantă.

b) O secantă fixă care trece prin punctul B intersectează cercul $\mathscr{C}_1$ în P iar cercul $\mathscr{C}_2$ în Q. Să se arate că $MP \parallel NQ$.

c) Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $[MN]$.

3. Să se trateze metodic subiectul "*Funcţii bijective*".

DEFINITIVAT 2006

BUCUREŞTI

1. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \middle| \ \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

- **a)** Să se arate că, dacă $\hat{x}$, $\hat{y} \in \mathbb{Z}_3$, atunci $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$.
- **b)** Să se arate că M, împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor, formează un corp comutativ.
- **c)** Să se determine $A \in M$ astfel încât $A^2 + I_2 = O_2$.
- **d)** Să se afle numărul elementelor corpului M.
- **e)** Dacă $X \in M$, să se calculeze X^8.

2. Fie $a \in (0, +\infty)$. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{a^x}{3^x + 4^x}$.

- **a)** Să se calculeze $f(0)$ şi $f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- **b)** Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
  - **(i)** $a = 2\sqrt{3}$;
  - **(ii)** $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3. Fie $ABCD$ un patrulater. Să se afle locul geometric al punctelor M din planul patrulaterului cu proprietatea că

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

Dicuţie.

4. Linii importante într-un triunghi (mediatoare, bisectoare, înălţimi, mediane) şi concurenţa lor.

IAŞI

1. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră operaţia algebrică:

$$x \star y = axy + b(x+y) + c,$$

unde a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Să se demonstreze că:

a) "$\star$" este asociativă $\Leftrightarrow b^2 - b - ac = 0$.

b) Dacă $b^2 - b - ac = 0$, atunci operaţia "$\star$" are element neutru dacă şi numai dacă b divide pe c.

2. Se dă o funcţie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că oricare ar fi $x \in [0, \infty)$, $f(x) = f(x^2)$. Arătaţi că:

a) $(\forall)$ $x \in [0, \infty)$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$, au loc relaţiile

$$f(x) = f(x^{2^n}) = f(\sqrt[2^n]{x}).$$

b) Dacă, în plus, f este continuă, atunci f este constantă.

3. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare în cadrul capitolului "*Linii importante într-un triunghi şi concurenţa lor*".

CLUJ-NAPOCA

1. **a)** Definiţi noţiunea de subcorp şi enunţaţi teorema de caracterizare a subcorpurilor.

b) Fie $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(i) Demonstraţi că $\mathbb{Q}[i]$ este subcorp al corpului $(\mathbb{C}^*, +, \cdot)$.

(ii) Arătaţi că $\mathbb{Q}[i]$ este cel mai mic subcorp al lui $\mathbb{Q}$.

c) Determinaţi toate subcorpurile lui $\mathbb{Q}[i]$.

2. Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 1, & \text{dacă } x \geq 2 \\ ax + b, & \text{dacă } 0 < x < 2 \end{cases}$.

a) Care este relaţia dintre a şi b astfel încât funcţia f să fie continuă?

b) Calculaţi $f'(x)$, $(\forall)\ x \in (0, +\infty)$.

c) Determinaţi valorile lui a şi b astfel încât funcţia f să fie derivabilă.

d) Fie F mulţimea tuturor primitivelor funcţiei f. Determinaţi o primitivă a funcţiei f cu proprietatea că $F(0) = 0$.

3. **a)** Teorema cosinusului şi teorema reciprocă a teoremei cosinusului (enunţuri şi demonstraţii). Aplicaţie la calculul lungimilor medianelor unui triunghi (locul şi rolul teoremei în programa şcolară, strategii didactice, metode şi mijloace folosite, obiective vizate).

b) Să se demonstreze că, în orice trapez, diagonalele se intersectează pe axa radicală a cercurilor care au ca diametre laturile neparalele ale trapezului.

CONSTANŢA

1. (a) Definiţi noţiunea de corp; exemple.
   (b) Stabiliţi elementele inversabile din $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, unde "$\cdot$" este înmulţirea claselor de resturi modulo n.
   (c) Studiaţi corpul claselor de resturi modulo p, unde p este un număr prim.

2. (a) Care dintre următoarele propoziţii referitoare la şirurile de numere reale sunt adevărate?
   (i) Orice şir monoton este convergent.
   (ii) Orice şir convergent este mărginit.
   (iii) Orice şir mărginit este convergent.
   (iv) Orice şir monoton este mărginit.
   (v) Orice şir convergent este monoton.
   (vi) Orice şir monoton şi mărginit este convergent.
   (b) Calculaţi:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n^3}}\right).$$
   (c) Enunţaţi şi demonstraţi teorema creşterilor finite a lui Lagrange.

3. (a) ((i) Fie două cercuri secante de centre O_1, O_2 cu punctele de intersecţie A şi B. Se construiesc punctele A_1 şi A_2, simetricele lui A faţă de O_1 şi respectiv O_2. Să se demonstreze că punctele A_1, B, A_2 sunt coliniare.
   ((ii) Se construiesc B_1 şi B_2 simetricele lui B faţă de O_1 şi respectiv O_2. Să se demonstreze că $A_1B_1B_2A_2$ este dreptunghi.
   (b) Se consideră în plan punctul $P(4;1)$. Aflaţi:
   ((i) Coordonatele punctului obţinut prin rotaţia punctului P în sens trigonometric cu $60°$.
   ((ii) Coordonatele punctului obţinut prin rotaţia punctului P în sens invers trigonometric cu $90°$.

PITEŞTI

1. Fie $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2|x|, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \\ \alpha x^2 - \beta \cos \pi x, & \text{dacă } x \in (1, 2] \end{cases}$.

a) Să se determine α, $\beta \in \mathbb{R}$ pentru care f este derivabilă în 1.

b) Pentru $\alpha = \beta = 1$, să se arate că f este integrabilă şi să se calculeze $\int_0^2 f(x)\, dx$.

2. Se consideră sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az \end{cases},$$

unde a este un parametru real.

a) Să se rezolve sistemul, ştiind că $a \neq 1$ şi $a \neq -2$.

b) Ce se întâmplă pentru $a = 1$ şi pentru $a = -2$?

c) Determinaţi valorile întregi ale lui $a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ pentru care $x^2 + y^2 + z^2$ este un număr întreg.

3. Numere complexe sub formă trigonometrică. Aspecte metodice.

PITEŞTI
Bilete pentru examenul oral

Biletul nr. 1

1. Funcţia exponenţială - aspecte metodice.

2. Să se arate că în triunghiul $\triangle ABC$ există egalitatea

$$b\cos(\sphericalangle C) + c\cos(\sphericalangle B) = a,$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor.

3. Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} ax+b, & \text{dacă } x\le 0\\ \dfrac{x-1}{x^2+1}, & \text{dacă } x>0\end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Biletul nr. 2

1. Binomul lui Newton - aspecte metodice.

2. Să se rezolve ecuaţia $\cos 2x + 3\cos x = 1$.

3. Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_1^3 x^2 \ln x\, dx$.

Biletul nr. 3

1. Metoda inducţiei matematice - aspecte metodice.

2. Se consideră trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$ şi $AD = AB + CD$. Dacă $E \in [BC]$ astfel încât $[BE] \equiv [EC]$, să se arate că $m(\sphericalangle AED) = 90°$.

3. Să se determine a, b, $c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c, & \text{dacă } x\in[-1,0]\\ \ln(x+1), & \text{dacă } x\in(0,1]\end{cases}$ să satisfacă condiţiile teoremei lui Rolle şi să se aplice teorema lui Rolle pentru a, b, c găsite.

Biletul nr. 4

1. Funcţia de gradul al doilea - aspecte metodice.

2. În paralelogramul $ABCD$ se duce $CE \perp BC$, $AE \perp AB$. Să se demonstreze că $DE \perp AC$.

3. Fie un număr natural n şi $I_n = \displaystyle\int x^n e^x\, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se determine o formulă de recurenţă între I_n şi I_{n-1}.

Biletul nr. 5

1. Funcţia logaritmică - aspecte metodice.

2. Ştiind că $z + \frac{1}{z} = 2 \cdot \cos a$, $a \in \mathbb{R}$, să se calculeze $z^n + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Dacă a, $b \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$, aplicând teorema lui Lagrange, să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan a - \tan b < \frac{b-a}{\cos^2 b}.$$

Biletul nr. 6

1. Teorema celor trei perpendiculare - aspecte metodice.

2. Să se rezolve ecuaţia: $\cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 1 = 0$.

3. Se consideră funcţia: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze o primitivă a funcţiei f.

Biletul nr. 7

1. Progresii aritmetice - aspecte metodice.

2. Să se verifice identitatea: $\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \cdot \tan 2x \cdot \tan x$.

3. Fie $0 < a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

a) Să se aplice teorema lui Lagrange pentru funcţia f.

b) Să se arate că are loc inegalitatea: $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$.

Biletul nr. 8

1. Progresii geometrice - aspecte metodice.

2. Fie $S_n = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$ şi $T_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$.

a) Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $S_n + iT_n$.

b) Să se determine S_{2003} şi T_{2003}.

3. Fie $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0, I_1 şi I_2.

b) Să se stabilească o relaţie de recurenţă pentru I_n.

Biletul nr. 9

1. Numere complexe sub formă trigonometrică - aspecte metodice.

2. Să se arate că dacă $x = y + z$, atunci $\cos x + \cos y + \cos z + 1 = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$.

3. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2x^2 + 1}, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 2ax + 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

Biletul nr. 10

1. Triunghiuri asemenea - aspecte metodice.

2. Să se arate că în orice triunghi $\triangle ABC$ avem:

$$bc \cos \hat{A} + ac \cos \hat{B} + ab \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului.

3. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + e^x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 + 1}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Biletul nr. 11

1. Relaţii metrice într-un triunghi dreptunghic - aspecte metodice.

2. Să se rezolve ecuaţia $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos 2x$.

3. Se consideră funcţia $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & \text{dacă } x \in [1, e] \\ ax + b, & \text{dacă } x \in (e, 5] \end{cases}$.

a) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să verifice condiţiile teoremei lui Lagrange.

b) Să se calculeze $\int_{1}^{e} f(x)\, dx$.

Biletul nr. 12

1. Metoda triunghiurilor congruente - aspecte metodice.

2. Să se demonstreze că:

$$\left(\frac{1 + i \cdot \tan t}{1 - i \cdot \tan t}\right)^n = \frac{1 + i \cdot \tan nt}{1 - i \cdot \tan nt}, \quad t \in \mathbb{R} - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\},$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Să se arate că pentru $0 < a < b \leq \frac{\pi}{2}$ are loc inegalitatea:

$$\frac{b - a}{\sin^2 b} < \cot a - \cot b < \frac{b - a}{\sin^2 a}.$$

Biletul nr. 13

1. Funcţia $\arctan x$ - aspecte metodice.

2. Să se demonstreze că dacă $x+y+z=\pi$, atunci $\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}$.

3. Fie $I_n=\int\frac{1}{(x^2+4)^n}\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1 şi I_2.

b) Să se stabilească o relaţie de recurenţă între termenii şirului $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Biletul nr. 14

1. Elemente de combinatorică: Permutări, Aranjamente, Combinări - aspecte metodice.

2. În cercul $(\mathscr{C}(O,r))$ se duc diametrele perpendiculare $[AC]$ şi $[BD]$. Fie M un punct pe arcul mic $\overset{\frown}{AB}$ şi $\{E\}=AM\cap CB$. Să se arate că:

a) $EF\perp AC$, unde $\{F\}=AB\cap CM$.

b) Triunghiul $\triangle EBF$ este isoscel.

3. Fie $I_n=\int\sin^n x\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1 şi I_2.

b) Să se stabilească o relaţie de recurenţă între I_n şi I_{n-2}.

DEFINITIVAT 2007

IAŞI

1. Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e \ln x - x$.

a) Să se studieze variaţia funcţiei f.

b) Să se reprezinte grafic funcţia f.

c) Să se cerceteze care dintre numerele e^{π} şi π^{e} este mai mare.

2. **a)** Fie cercul $\mathscr{C}(O, R)$ şi două puncte distincte A şi B aparţinând cercului. Ştiind că dreapta d este tangentă cercului în punctul B, iar C este piciorul perpendicularei din A pe dreapta d, să se arate că raportul $\dfrac{AB^2}{AC}$ nu depinde de poziţia punctelor A şi B.

b) Fie tetraedrul $ABCD$. Un plan paralel cu două laturi neconcurente ale tetraedului intersectează muchiile acestuia în punctele M, N, P, Q. Să se studieze natura patrulaterului $MNPQ$. În ce condiţii $MNPQ$ este pătrat?

3. Funcţii inversabile. Tratare metodică.

CONSTANŢA

1. **(a)** Demonstraţi că numărul $\sqrt[3]{2}$ este iraţional.

(b) Fie a, b, $c \in \mathbb{Q}$. Demonstraţi că dacă $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$, atunci $a = b = c = 0$.

(c) Fie $G = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \,|\, a, b, c \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\}$. Arătaţi că G este grup în raport cu înmulţirea numerelor reale.

(d) Găsiţi inversul lui $x = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ în acest grup.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$.

(a) Demonstraţi că f este derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$.

(b) Este continuă a doua derivată a lui f pe toată axa reală? Argumentaţi răspunsul.

3. Fie tetraedrul $ABCD$ şi punctul $M \in (AB)$. Demonstraţi că volumul tetraedrului $DAMC$ este egal cu volumul tetraedrului $DBMC$ dacă şi numai dacă $(AM) \equiv (MB)$.

4. Teorema celor trei perpendiculare (tratare metodică). Se vor aborda:

(a) Enunţ şi demonstraţie.

(b) Reciproce (enunţuri şi demonstraţii).

(c) Compuneţi o problemă a cărei rezolvare să se bazeze pe teorema celor trei perpendiculare.

(d) Comentaţi o greşeală frecventă pe care o fac elevii în aplicarea teoremei.

DEFINITIVAT 2008

IAŞI

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

a) Să se arate că $f(x) > 1$ pentru orice $x > 0$.

b) Să se arate că graficul funcţiei f are o singură asimptotă şi să se determine.

c) Să se studieze convergenţa şirului recurent definit prin $x_{n+1} = x_n f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 > 0$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 6X + 2$, $f \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se calculeze $f(-2) \cdot f(2)$.

b) Să se arate că f nu are rădăcini raţionale.

c) Să se arate că toate rădăcinile lui f sunt reale.

d) Să se arate că $S_{k+3} - 6S_{k+1} + 2S_k = 0$, $(\forall)$ $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, unde $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$.

3. Teorema lui Thales. Asemănarea triunghiurilor (definiţii, teoreme, cazuri de asemănare, aplicaţii).

BUCUREŞTI

1. Fie $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$, definim funcţia $f_t : P \to P$ prin $f_t(x, y) = \left(x + ty + \dfrac{t^2}{2}, y + t\right)$.

Să se arate că:

a) Are loc relaţia $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'}$, pentru orice t şi t' din $\mathbb{R}$.

b) Mulţimea $G = \{f_t | t \in \mathbb{R}\}$ este grup comutativ în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.

c) Grupurile $(G, \circ)$ şi $(\mathbb{R}, +)$ sunt izomorfe.

d) Grupurile $(G, \circ)$ şi $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ nu sunt izomorfe.

2. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Se defineşte funcţia $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{dacă } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f_α este derivabilă dacă şi numai dacă $\alpha = 1$.

b) Să se calculeze $f_1'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3. Se consideră un punct A' pe latura BC a unui triunghi $\triangle ABC$. Paralela prin A' la latura AC intersectează latura AB în C', iar paralela prin A' la latura AB intersectează latura AC în B'.

a) Notând $k = \dfrac{A'B}{A'C}$, să se exprime aria paralelogramului $A'B'AC'$ în funcţie de aria triunghiului $\triangle BA'C'$ şi de aria triunghiului $\triangle CA'B'$.

b) Să se afle poziţia punctului A' pentru care aria paralelogramului $A'B'AC'$ este maximă.

4. Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic (tratare metodică).

CONSTANŢA

1. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - aX^3 + 3X^2 - 3X + b$, $g = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 6X + 4$.

a) Aflaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca f să fie divizibil cu $X^2 + 1$.

b) Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia algebrică $g(x) = 0$.

c) Pentru $a = 3$, $b = 2$, aflaţi cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g.

2. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 2x + 3}\, dx$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi I_2 şi I_3.

b) Să se arate că $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 3I_n = \dfrac{1}{n+1}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (nI_n)$.

3. Fie O un punct fixat în planul euclidian şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Definiţi rotaţia de unghi α şi centru O. Interpretare în $\mathbb{C}$.

b) Să se arate că mulţimea rotaţiilor de centru O formează grup în raport cu operaţia de compunere.

c) În exteriorul patrulaterului convex $ABCD$ se construiesc pătratele $AEFB$, $BGHC$, $CIJD$, $DKLA$, de centre O_1, O_2, O_3 şi respectiv O_4. Arătaţi că $O_1O_3 \perp O_2O_4$.

4. Prezentaţi aspectele ştiinţifice şi metodice ale lecţiei: "*Şiruri. Convergenţă. Proprietăţi ale şirurilor convergente*".

TIMIŞOARA

1. Fie $f, g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + \tan x)$, $g(x) = \int_0^x \ln(1 + \tan x \tan t)\, dt$. Să se studieze dacă:

a) Ecuaţia $x = f(x)$ are o singură soluţie pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Şirul (x_n) definit de $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$; $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, este convergent.

c) Există $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x' f(x)}{x - f(x)}$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} n x_n$.

d) Există $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^3}$ şi calculaţi $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Fie $f_m(x) = (m-1)x^2 - 2mx + m$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ o familie de parabole.

a) Să se studieze dacă parabolele $y = f_m(x)$ trec printr-un punct fix.

b) Să se discute natura şi semnul rădăcinilor ecuaţiei $f_m(x) = 0$.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ astfel încât rădăcinile ecuaţiei $f_m(x) = 0$ să satisfacă condiţiile $x_1 \leq -1$ şi $x_2 \geq -1$.

3. a) Teorema medianei (consideraţii metodice).

b) Fie $\triangle ABC$ un triunghi cu medianele corespunzătoare laturilor BC şi AC perpendiculare. Să se arate că:

$$\frac{a^2 + b^2}{5} = c^2.$$

DEFINITIVAT 2009

IAŞI

1. Considerăm polinomul $f = X^3 - mX^2 + 2X - 2 \in \mathbb{R}[X]$, $m \in \mathbb{R}$. Notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui f.

a) Găsiţi valorile parametrului m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

b) Arătaţi că pentru $m \geq 0$, polinomul f nu poate admite rădăcini în intervalul $(-\infty, 0]$.

c) Pentru $|m| < 2$, arătaţi că f are cel puţin o rădăcină în $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

d) Fixăm $m = 1$. Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - X + 2$. Calculaţi $g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}}$.

a) Să se traseze graficul funcţiei f.

b) Să se studieze natura şirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $x_0 = 1$ şi $x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$.

3. Teorema celor trei perpendiculare: aspecte metodice.

BUCUREŞTI

1. Fie polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, grad$(f) = 2$. Să se arate că dacă $f(n) \in \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \{0, 1, 2\}$, atunci $f(n) \in \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

2. Fie $d \in \mathbb{Z}$ un număr liber de pătrate. Notăm $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{x + y\sqrt{d} \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$. Să se arate că:

- **a)** Operaţiile uzuale de adunare şi de înmulţire induc pe mulţimea $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ o structură de corp comutativ.
- **b)** Corpurile $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ şi $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ nu sunt izomorfe.

3. Fie $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dată astfel: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, 2) \\ \ln x, & \text{dacă } x \in [2, +\infty) \end{cases}$.

- **a)** Să se studieze derivabilitatea funcţiei f, precizându-se în fiecare dintre punctele domeniului de definiţie valorile derivatelor laterale.
- **b)** Să se studieze monotonia funcţiei f.
- **c)** Să se arate că f este integrabilă pe intervalul $[1, 3]$ şi să se calculeze $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.
- **d)** Să se arate că şirul definit inductiv prin $x_1 \in [0, \infty)$ arbitrar ales şi $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, converge către 0.

4. Fie O, G, H respectiv centrul cercului circumscris, centrul de greutate şi ortocentrul triunghiului ABC, iar A' mijlocul laturii $[BC]$, A'' punctul diametral opus lui A pe cercul circumscris triunghiului ABC.

- **a)** Să se arate că $BHCA''$ este paralelogram.
- **b)** Să se arate că $\overrightarrow{OA'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.
- **c)** Să se arate că $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
- **d)** Ştiind că oricare ar fi punctul P se verifică egalitatea $\overrightarrow{PG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$, să se arate că punctele O, G şi H sunt coliniare.

5. Relaţii metrice într-un triunghi dreptunghic. Să se enunţe şi să se demonstreze cel puţin trei teoreme. Tratare metodică.

CLUJ-NAPOCA

1. **a)** Definiţi următoarele noţiuni: *funcţie*, *funcţie injectivă*, *funcţie surjectivă*, *funcţie bijectivă*, *funcţie inversabilă*.

b) Demonstraţi că o funcţie $f : A \to B$ este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.

2. Fie A o mulţime cu cel puţin 3 elemente. Notăm $A^A = \{f \mid f : A \to A\}$ şi $S_A = \{f : A \to A \mid f \text{ bijectivă}\}$. Să se arate că:

a) Compunerea funcţiilor înzestrează mulţimea A^A cu o structură de monoid.

b) S_A este o parte stabilă a lui A^A în raport cu compunerea funcţiilor şi operaţia indusă de compunere pe S_A înzestrează mulţimea S_A cu o structură de grup.

c) Grupul de la punctul anterior este necomutativ.

3. **a)** Definiţi inversiunea de pol O şi putere k, $k \in \mathbb{R}^*$.

b) Să se arate că dacă A' şi B' sunt inversele punctelor A şi B prin inversiunea de pol O şi putere k, atunci $A'B' = AB \cdot \dfrac{|k|}{OA \cdot OB}$.

c) Să se demonstreze că dacă $ABCD$ este un patrulater inscriptibil, atunci $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

4. Aveţi de proiectat o lecţie cu tema "*Teorema creşterilor finite a lui Lagrange*". În cadrul acestei lecţii prezentaţi **numai** următoarele activităţi de învăţare:

a) enunţul teoremei;

b) formularea unui exemplu de funcţie care nu verifică o ipoteză a teoremei lui Lagrange, dar pentru care concluzia rămâne adevărată;

c) formularea unui exemplu de funcţie care nu verifică o ipoteză a teoremei lui Lagrange, dar pentru care concluzia este falsă.

CONSTANŢA

1. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C}$ o rădăcină de grad 3 a unităţii. Se consideră polinoamele $\eta_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\eta_2 = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + x_3$ şi $\eta_3 = \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon x_2 + x_3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$.

(a) Exprimaţi x_1, x_2, x_3 ca polinoame în η_1, η_2, η_3.

(b) Fie $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$. Demonstraţi că f este invariant la permutarea ciclică a nedeterminatelor x_1, x_2, x_3 dacă şi numai dacă f este de forma $f = \sum\limits_{a=(a_1,a_2,a_3)} c_a \eta_1^{a_1} \eta_2^{a_2} \eta_3^{a_3}$, unde $2a_2 + a_3 \equiv 0 (\mod 3)$ pentru orice a cu $c_a \neq 0$.

2. Se consideră funcţiile $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{t+1}\,dt$, unde $n \in \mathbb{N}$.

(a) Să se calculeze $f_0(x)$.

(b) Să se arate că $f'_n(x) \leq x$, pentru orice $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

(c) Să se arate că $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{n+1}$, pentru orice $x \in [0,1]$.

(d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

3. Se consideră triunghiul ABC şi punctele O, G, H respectiv centrul de greutate şi ortocentrul triunghiului ABC.

(a) Să se arate că punctele O, G, H sunt coliniare.

(b) Folosind eventual relaţia $3OG = OH$, să se deducă relaţia $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

(c) Fie M un punct care aparţine cercului circumscris triunghiului ABC, diferit de A, B, C. Se notează cu H_A ortocentrul triunghiului MBC, cu H_B ortocentrul triunghiului MAC şi cu H_C ortocentrul triunghiului MAB. Folosind eventual relaţia de la punctul (b), să se arate că $\triangle H_A H_B H_C \equiv \triangle ABC$.

4. Proiectaţi lecţia cu tema Relaţiile lui Viète având în vedere identificarea clară a obiectivelor şi a conţinuturilor lecţiei şi urmărind planul:

- Teorema lui Viète pentru relaţiile între rădăcinile şi coeficienţii unui polinom cu coeficienţi în $\mathbb{C}$.
- Cazuri particulare uzuale: relaţiile lui Viète pentru polinomele de grad 2, 3, 4.
- Prezentaţi trei probleme reprezentative pentru tema propusă.

TIMIŞOARA

1. Pe mulţimea G a matricelor de forma $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ cu $x,\ y \in \mathbb{R}$, se consideră legea de compoziţie $M_1 \star M_2 = M_1 \cdot M_2 + 2(M_1 + M_2 + I_2)$. Să se arate că:

a) "$\star$" este o lege de compoziţie internă asociativă, comutativă cu element unitate.

b) $(G, \star)$ nu este grup.

c) există $G_0 \subset G$ astfel încât $(G_0, \star)$ este grup comutativ.

2. Fie şirul (x_n) definit prin $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, $x_0 \geq -6$ şi funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x + 1}$. Să se studieze:

a) Monotonia şi convergenţa lui (x_n), iar apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

b) Monotonia şi integrabilitatea lui f, calculân du-se şi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

3. **a)** Să se trateze din punct de vedere metodic teorema înălţimii şi concurenţa înălţimilor într-un triunghi.

b) Fie punctele $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(m, 2m - 3)$ cu $m \in \mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât simetricul centrului de greutate al triunghiului ABC faţă de origine este $S(-3, -3)$.

DEFINITIVAT 2010

SIBIU

1. Proiect de lecție la clasa a VIII-a: *Conul. Trunchiul de con.*

2. Metoda învățării prin descoperire.

3. Inele: definiție, exemple. Subinele: definiție, teorema de caracterizare.

4. Fie ABC un triunghi oarecare în care notăm cu a, b, c laturile BC, CA, respectiv AB. Arătați că:

a) raza cercului înscris r este dată de formula $r = \dfrac{b+c-a}{2} \tan \dfrac{A}{2}$;

b) dacă $m(\sphericalangle A) = 150^\circ$, atunci raza cercului circumscris R este egală cu a;

c) dacă $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, atunci avem inegalitățile:

$$(R+r)^2 \geq bc, \ \frac{r}{R} \leq \sqrt{2} - 1.$$

5. Să se determine toate numerele naturale n astfel ca numerele n, $n+2$, $n+6$, $n+8$, $n+14$ să fie simultan prime.

6. Fie a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Arătați că, dacă

$$|ax^3 + bx^2 + cx + d| \leq |x^3 + 2x^2 - x - 2|,$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci

$$\left| \int_{-1}^{1} (bx^2 + cx + d) \, dx \right| \leq \frac{8}{3}.$$

BUCUREȘTI

1. **a)** Definiți funcția injectivă.

b) Dați un exemplu de funcțe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care nu este injectivă.

c) Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + x + 2$. Arătați că g este o funcție injectivă.

2. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$.

a) Definiți noțiunea de funcție derivabilă într-un punct. Verificați dacă funcția f este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

b) Calculați $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx$.

c) Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = f(a_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Studiați convergența șirului $(a_n)_{n\geq 0}$.

3. **a)** Enunțați teorema sinusurilor.

b) În triunghiul ABC avem relația

$$b + a \cdot \sin C = c + b \cdot \sin A.$$

Arătați că triunghiul dat este isoscel sau dreptunghic.

c) Să se arate că în orice triunghi dreptunghic, suma catetelor este egală cu suma diametrelor cercurilor înscris și circumscris triunghiului.

4. Rolul exemplelor și contraexemplelor în predare și învățare. Se cer:

a) o discuție generală;

b) câte o situație concretă din algebră, geometrie, respectiv analiză matematică, în care evidențierea unor exemple și contraexemple are un rol important în înțelegerea conceptelor.

CLUJ-NAPOCA

I. **a)** Definiți noțiunile de $c.m.m.d.c$ și $c.m.m.m.c.$.

b) Demonstrați existența $c.m.m.d.c.$ folosind algoritmul lui Euclid.

c) Demonstrați că pentru orice numere naturale nenule a, b are loc: $(a,b)\cdot[a,b]=ab$.

d) Este adevărată egalitatea $(a,b,c)\cdot[a,b,c]=abc$, pentru orice numere naturale nenule a, b, c?

e) Rezolvați în mulțimea $\mathbb{N}^*$ ecuația:

$$xyz+xy+yz+xz+x+y+z=2010.$$

II. **a)** Definiți noțiunea de funcție integrabilă Riemann. Enunțați teorema lui Leibniz-Newton.

b) Să se calculeze: $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{x^3+1}\,dx.$

III. O dreaptă perpendiculară pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic ABC, întâlnește pe AB în M, iar pe AC în N. Cercul circumscris triunghiului BMC intersectează pe AC în Q, iar cercul circumscris triunghiului BNC intersectează pe AB în P. Ce fel de patrulater este $MNPQ$?

IV. Proiectați o lecție de dobândire de noi cunoștințe cu tema ”*Paralelogramul, proprietăți, cazuri particulare*”.

CONSTANȚA

1. **(a)** Să se arate că ecuația $x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 40 = 0$ nu are soluții în numere întregi.

(b) Să se arate că numărul $\sqrt[3]{\sqrt{10}+3} + \sqrt[3]{\sqrt{10}-3}$ este irațional.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x-a|$, unde a este un parametru real.

(a) Să se arate că f este continuă pe $\mathbb{R}$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

(b) Să se arate că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a = 0$.

(c) Să se determine, în funcție de a, mulțimea punctelor de extrem ale funcției f.

3. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = a$, $BC = b$ și $AA' = c$. Se notează cu α, β, γ unghiurile pe care le formează $A'C$ cu planele (ABC), (BCC') și (DCC').

(a) Exprimați $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ în funcție de a, b, c.

(b) Calculați minimul expresiei

$$\frac{1}{\tan^2\alpha} + \frac{1}{\tan^2\beta} + \frac{1}{\tan^2\gamma}$$

și demonstrați că acest minim se atinge atunci și numai atunci când paralelipipedul este cub.

4. Exemplificați metoda inducției matematice în trei tipuri de probleme.

5. Întocmiți o fișă de lucru pentru o lecție la alegere din următoarele:

- Reguli de calcul cu radicali.
- Graficul funcției de gradul al doilea (intersecții cu axele, simetrii, punct de extrem).
- Formule trigonometrice ($\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\sin a \pm \sin b$, $\cos a \pm \cos b$).

6. Enumerați trei avantaje sau dezavantaje ale utilizării itemilor cu răspuns de completare în evaluarea elevilor.

IAȘI

1. Se consideră funcția polinomială $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, $c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Se notează cu x_1, x_2 soluțiile ecuației $f(x) = 0$, cu $s = x_1 + x_2$, cu $p = x_1 x_2$ și cu $\Delta = b^2 - 4ac$. Să se determine:

(a) s și p, dacă $a = 1$, $b = m$, $c = 1$ și să se discute natura soluțiilor x_1, x_2 în funcție de parametrul $m \in \mathbb{N}$.

(b) a, b și c, știind că $s = 3$, $p = 2$ și a, b, c sunt numere întregi prime între ele.

(c) a, b și c, astfel încât a, Δ, p, s să fie numere întregi consecutive (în această ordine).

2. Fie $ABCD$ un trapez și O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD. Dacă notăm cu S_1 și S_2 ariile triunghiurilor AOB și COD, să se arate că aria trapezului este egală cu $S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}$ (AB și CD sunt bazele trapezului).

3. Teorema cosinusului (enunț și demonstrație, aplicații la calculul lungimii medianei într-un triunghi ABC și la calculul valorii $\cos \dfrac{A}{2}$, comentariu metodic).

4. Elaborați un plan de lecție pentru tema ”*Aplicații ale calculului integral la determinarea ariilor*”.

DEFINITIVAT 2011

BACĂU

1. Aveți de proiectat o lecție cu tema ”*Teorema înălțimii și teorema catetei*” sau cu tema ”*Ecuațiile dreptei în plan*”.

a) Prezentați conținutul lecției și precizați principalele activități de învățare.

b) Exemplificați utilizarea noilor cunoștințe prin compunerea și rezolvarea unei probleme. Explicați cum dirijați rezolvarea problemei de către elevi.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine valorile lui x pentru care A este inversabilă.

b) Să se rezolve inecuația $\det(A - 2I) \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$, unde I este matricea unitate de ordinul 3.

c) Pentru $x = 0$ să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax + 10}{x^2 - 1}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine asimptotele graficului funcției pentru $a = 1$.

b) Să se afle $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = -3$ să fie punct de extrem local al funcției.

c) Să se arate că $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx < 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

CLUJ-NAPOCA

1. Metoda inducției matematice (aspecte metodice: locul și rolul temei în programa școlară, obiectivele operaționale vizate; conținutul noțional matematic: metode. mijloace, materiale folosite; strategii didactice; forme de evaluare).

2. Demonstrați că:

a) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, are loc egalitatea

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n^3.$$

b) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, are loc inegalitatea

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \cdots + \frac{\sqrt{n^2-3n+2}}{2n-3} < \frac{n-2}{2}.$$

3. Izometrii în plan: simetrii, translații, rotații (definiții).

4. Fie ABC un triunghi echilateral și fie M un punct în planul său. Să se demonstreze că:

a) dacă $M \notin \mathscr{C}(A, B, C)$, atunci se poate forma un triunghi cu segmentele $[MA]$, $[MB]$ și $[MC]$;

b) dacă $M \in \mathscr{C}(A, B, C)$, atunci unul dintre segmentele $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$ are lungimea egală cu suma lungimilor celorlalte două segmente.

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = x^3 + x + 1$.

a) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ecuația

$$f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$$

are o soluție unică $x_n \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, unde (x_n) este șirul de la punctul a).

c) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$, unde (x_n) este șirul de la punctul a).

DEFINITIVAT 2012

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + \hat{2}X^2 + X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$.

a) Arătați că f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

b) Dați un exemplu de polinom $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$ și care are aceeași funcție polinomială cu f.

2. Un hexagon inscriptibil are trei laturi de lungime a și trei laturi de lungime b.

a) Arătați că hexagonul are un unghi cu măsura de $120°$.

b) Calculați, în funcție de a și b, raza cercului circumscris hexagonului.

3. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot \arctan x$.

a) Determinați $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care graficul funcției f_k are asimptotă spre $+\infty$.

b) Arătați că

$$(n+1)\int_0^1 f_n(x)\,dx + (n-1)\int_0^1 f_{n-2}(x)\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$$

SUBIECTUL AL II-LEA

Elaborați un item de tip întrebare structurată prin care să evaluați trei dintre competențele specifice precizate în următoarea secvență a programei școlare de matematică pentru clasa a IX-a:

Competențe specifice	Conținuturi
1. Diferențierea, prin exemple a variației liniare de cea pătratică **2. Completarea** unor tabele de valori necesare pentru trasarea graficului funcției de gradul al II-lea **3. Aplicarea** unor algoritmi pentru trasarea graficului funcției de gradul al II-lea (prin puncte semnificative) **4. Exprimarea** proprietăților unei funcții prin condiții algebrice sau geometrice **5. Utilizarea** relațiilor lui Viète pentru caracterizarea soluțiilor ecuației de gradul al II-lea și pentru rezolvarea unor sisteme de ecuații **6. Identificarea** unor metode grafice de rezolvare a ecuațiilor sau sistemelor de ecuații	**Funcția de gradul al doilea** • Reprezentarea grafică a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația $f(x) = 0$, simetria față de drepte de forma $x = m$, cu $m \in \mathbb{R}$ • Relațiile lui Viète, rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p, \end{cases}$ cu $s, p \in \mathbb{R}$

(*Programa școlară de matematică, OMECI nr.* 5099/09.09.2009)

În elaborarea itemului se vor avea în vedere următoarele aspecte:

1. succesiunea subîntrebărilor să asigure creșterea treptată a gradului de dificultate;
2. fiecare subîntrebare să solicite un răspuns care nu depinde de răspunsul la subîntrebarea precedentă;
3. subîntrebările să fie în concordanță cu stimulul utilizat.

Notă. Se punctează și elaborarea detaliată a răspunsului așteptat, precum și corectitudinea științifică a informației matematice.

SUBIECTUL AL III-LEA

Formele educației (educația formală, educația nonformală, educația informală): definirea, analiza și interdependența conceptelor.

DEFINITIVAT 2013

SUBIECTUL I

1. Se consideră $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere reale cu rația r și $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică de numere reale cu rația q. Se știe că $a_1 > 0$, $r > 0$, $a_1 = b_1$ și $a_2 = b_2$.

a) Arătați că rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict mai mare decât 1.

b) Demonstrați că $b_k > a_k$ oricare ar fi numărul natural $k \geq 3$.

2. Se consideră $D \in (BC)$ piciorul bisectoarei unghiului A al triunghiului ABC.

a) În cazul în care $AB = AC = 3$ și $m(\sphericalangle BAC) = 120°$, calculați AD.

b) Dacă $AB + CD = AC + BD$, arătați că triunghiul ABC este isoscel.

3. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{e^x}{1+x^n}$.

a) Calculați $\displaystyle\int_0^1 (1+x)f_1(x)\,dx$.

b) Arătați că $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = e - 1$.

SUBIECTUL AL II-LEA

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a (3 ore).

Competențe specifice	Conținuturi
1. **Recunoașterea** funcției de gradul întâi descrisă în moduri diferite **2.** **Utilizarea** unor metode algebrice sau grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații **3.** **Descrierea** unor proprietăți desprinse din reprezentarea grafică a funcției de gradul întâi sau din rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații **4.** **Exprimarea** legăturii între funcția de gradul întâi și reprezentarea ei geometrică **5.** **Interpretarea** graficului funcției de gradul întâi utilizând proprietățile algebrice ale funcției **6.** **Rezolvarea** cu ajutorul funcțiilor a unei situații-problemă și interpretarea rezultatului	**Funcția de gradul întâi** • Definiție; reprezentarea grafică a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația $f(x) = 0$ • Interpretarea grafică a proprietăților algebrice ale funcției: monotonie, semnul funcției • Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ $(\geq, <, >)$, $a, b \in \mathbb{R}$ studiate pe $\mathbb{R}$ • Poziția relativă a două drepte; sisteme de tipul $\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$, a, b, c, m, n, p numere reale.

(*Programa școlară de matematică, OMECI nr.* 5099/09.09.2009)

Elaborați trei itemi: *un item de completare*, *un item de tip alegere multiplă* (cu un singur răspuns corect) și *un item de tip rezolvare de probleme*, pentru a evalua trei dintre competențele specifice precizate în secvența de mai sus.

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

– formatul fiecărui item elaborat în vederea evaluării competenței/competențelor specifice alese;

– răspunsul așteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaborați;

– conținutul științific al informației de specialitate.

SUBIECTUL AL III-LEA

Finalitățile educației: clasificare, ideal, scop, obiective, proceduri de operaționalizare.

DEFINITIVAT 2014

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

a) Arătați că $f(x) \geq 3$ pentru orice număr real x.

b) Determinați soluțiile întregi ale inecuației $(f \circ f)(x) \leq 35$.

2. În dreptunghiul $ABCD$, în care $BC < AB < 2BC$, se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$ și $P \in (CD)$ astfel încât $AM = BC$ și $BM = CN = DP$.

a) Arătați că triunghiurile ADP și PCN sunt congruente.

b) Dreptele AN și CM se intersectează în Q. Arătați că măsura unghiului AQM este egală cu $45°$.

3. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\ln^n x}{x}$.

a) Calculați $\displaystyle\int_{e}^{e^2} f_1(x)\,dx$.

b) Arătați că $f_n(x) \leq \dfrac{n^n}{e^n}$ pentru orice $x \in (1, +\infty)$ și orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL AL II-LEA

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a (3 ore).

Competențe specifice	Conținuturi
1. **Recunoașterea** unor corespondențe care sunt șiruri, progresii aritmetice sau geometrice **2.** **Calcularea** valorilor unorșiruri care modelează situații practice în scopul caracterizării acestora **3.** **Alegerea** și **utilizarea** unor modalități adecvate de calculare a elementelor unui șir **4.** **Interpretarea** grafică a unor relații provenite din probleme practice **5.** **Analizarea** datelor în vederea aplicării unor formule de recurență sau a raționamentului de tip inductiv în rezolvarea problemelor **6.** **Analizarea** și **adaptarea** scrierii termenilor unui șir în funcție de context	**Șiruri** • Modalități de a descrie un șir; șiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii • Condiția ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică pentru $n \geq 3$

(*Programa școlară de matematică, OMECI nr.* 5099/09.09.2009)

Pentru o evaluare curentă două dintre competențele specifice precizate în secvența de mai sus, elaborați doi itemi: *un item de tip alegere multiplă* (cu un singur răspuns corect) și *un item de tip rezolvare de probleme*.

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

– formatul fiecărui item elaborat în vederea evaluării competenței specifice alese;

– răspunsul așteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaborați;

– conținutul științific al informației de specialitate.

SUBIECTUL AL III-LEA

Învățarea: concept, condiții interne și condiții externe.

DEFINITIVAT 2015

SUBIECTUL I

1. Se consideră în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = m \end{cases}$, unde m este număr real.

a) Pentru $m = 1$, rezolvați sistemul de ecuații.

b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

2. Se consideră un pătrat $ABCD$, punctul E în interiorul pătratului astfel încât triunghiul ABE să fie echilateral și punctul F, intersecția dreptelor AC și BE.

a) Arătați că măsura unghiului CDF este $30°$.

b) Demonstrați că $EC^2 = EF \cdot BC$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

a) Determinați imaginea funcției f.

b) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f\left(\mathrm{e}^x\right) \mathrm{d}x = \arctan \mathrm{e} - \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VI-a.

Competențe specifice	Conținuturi
1. **Identificarea** triunghiurilor în configurații geometrice date **2.** **Stabilirea** congruenței triunghiurilor oarecare **3.** **Clasificarea** triunghiurilor după anumite criterii date sau alese **4.** **Exprimarea** proprietăților figurilor geometrice în limbaj matematic **5.** **Interpretarea** cazurilor de congruență a triunghiurilor în corelație cu cazurile de construcție a triunghiurilor **6.** **Aplicarea** metodei triunghiurilor congruente în rezolvarea unor probleme matematice sau practice	**Congruența triunghiurilor** • Triunghi: definiție, elemente; clasificarea triunghiurilor; perimetrul triunghiului • Construcția triunghiurilor: cazurile LUL, ULU, LLL. Congruența triunghiurilor oarecare: criterii de congruență a triunghiurilor: LUL, ULU, LLL • Metoda triunghiurilor congruente

(*Programa școlară de matematică, OMECI nr.* 5097/09.09.2009)

Pentru o evaluare, la finalul unității de învățare **Congruența triunghiurilor** (clasa a VI-a), a două dintre competențele specifice precizate în secvența de mai sus, elaborați doi itemi: *un item de completare* și *un item de tip rezolvare de probleme.*

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

– formatul fiecărui item elaborat în vederea evaluării competenței specifice alese;

– răspunsul așteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaborați;

– corectitudinea științifică a informației de specialitate.

SUBIECTUL AL III-LEA

Procesul de învățământ – analiză conceptuală și abordări interacționale între învățare - predare - evaluare.

DEFINITIVAT 2016

SUBIECTUL I

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \star y = 2(x-7)(y-7)+7$.

a) Demonstrați că $1 \star 2 \star 3 \star \ldots \star 2016 = 7$.

b) Determinați numerele reale x, pentru care $7^x \star \log_2 x = 7$.

2. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, punctele M și N, situate în semiplanul determinat de dreapta BC și punctul A, astfel încât $MB \perp AB$, $MB = AB$ și $NC \perp AC$, $NC = AC$.

a) Arătați că punctele M, A și N sunt coliniare.

b) Demonstrați că $MN = \sqrt{2}(AB + AC)$.

3. Se consideră funcția $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$.

a) Determinați imaginea funcției f.

b) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_2^x f(t)\,dt$.

SUBIECTUL AL II-LEA

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VIII-a.

Competențe specifice	Conținuturi
1. **Identificarea** în exemple, în exerciții sau în probleme a numerelor reale și a formulelor de calcul prescurtat **2.** **Utilizarea** în exerciții a definiției intervalelor de numere reale și **reprezentarea** acestora pe axa numerelor **3.** **Alegerea** formei de reprezentare a unui număr real și **utilizarea** de algoritmi pentru optimizarea calculului cu numere reale **4.** **Folosirea** terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers, parte întreagă, parte fracționară) în contexte variate **5.** **Deducerea** și **aplicarea** formulelor de calcul prescurtat pentru optimizarea unor calcule **6.** **Rezolvarea** unor situații-problemă utilizând rapoarte de numere reale reprezentate prin litere; **interpretarea** rezultatului	**Numere reale** • $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări. Modulul unui număr real. Intervale de numere reale • Operații cu numere reale; raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$ sau $a \pm \sqrt{b}$, unde a, $b \in \mathbb{N}^*$ • Calcule cu numere reale reprezentate prin litere; formule de calcul prescurtat: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ • Descompuneri în factori (factor comun, grupare de termeni, formule de calcul) • Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere; operații cu acestea (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere)

(*Programa școlară de matematică, OMECI nr.* 5097/09.09.2009)

Elaborați trei itemi: un *item de completare*, un *item de tip alegere multiplă* și un *item de tip rezolvare de probleme*, ca parte componentă a unui test de evaluare la finalul unității de învățare **Numere reale** (clasa a VIII-a), prin care se evaluează formarea/dezvoltarea a trei competențe specifice precizate în secvența dată din programa școlară.

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

– formatul fiecărui item elaborat în vederea evaluării competenței specifice alese;

– răspunsul așteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaborați;

– corectitudinea științifică a informației de specialitate.

SUBIECTUL AL III-LEA

Răspundeți la fiecare dintre următoarele cerințe elaborate pe baza **Programei pentru examenul național de definitivare în învățământ** la disciplina p**edagogie și elemente de psihologie școlară**:

1. Explicați conceptele de *învățare* și de *predare*.
2. Menționați câte o caracteristică a educației informale și a educației formale.
3. Enumerați trei tipuri de curriculum.
4. Precizați două funcții ale evaluării școlare.
5. Prezentați un avantaj și un dezavantaj ale utilizării formei de organizare *frontală* a clasei de elevi.

DEFINITIVAT 2017

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 2x - 1$, unde m este un număr real.

a) Pentru $m = -1$, calculați $f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(10)$.

b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AD \perp DB$, $AB = 2BC$ și punctele M și N, mijloacele laturilor AB, respectiv CD.

a) Arătați că perimetrul paralelogramului $ABCD$ este de două ori mai mare decât perimetrul triunghiului AMD.

b) Demonstrați că triunghiul MBN este echilateral.

3. Se consideră matricea $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ y & 1 & x \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

a) Demonstrați că $(\,A(0, 0)\,)^3 = I_3$.

b) Determinați numerele naturale m și n pentru care $\det(\,A(m, n)\,) = 0$.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

a) Demonstrați că funcția f are două puncte de inflexiune.

b) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ are aria egală cu $\ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$.

SUBIECTUL AL II-LEA

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a.

Competențe specifice	Conținuturi
1. **Identificarea** în limbaj cotidian sau în probleme de matematică a unor noțiuni specifice logicii matematice și teoriei mulțimilor **2.** **Reprezentarea** adecvată a mulțimilor și a operațiilor logice în scopul identificării unor proprietăți ale acestora **3.** **Alegerea** și **utilizarea** de algoritmi pentru efectuarea unor operații cu numere reale, cu mulțimi, cu propoziții/predicate **4.** **Deducerea** unor rezultate și verificarea acestora utilizând inducția matematică sau alte raționamente logice **5.** **Redactarea** rezolvării unei probleme, corelând limbajul uzual cu cel al logicii matematice și al teoriei mulțimilor **6.** **Transpunerea** unei situații-problemă în limbaj matematic, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului	**Mulțimi și elemente de logică matematică** • Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos; operații cu intervale de numere reale • Propoziție, predicat, cuantificatori • Operații logice elementare (negație, conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență) corelate cu operațiile și relațiile cu mulțimi (complementară, intersecție, reuniune, incluziune, egalitate); raționament prin reducere la absurd • Inducția matematică

(*Programa școlară de matematică, OMECI nr.* 5099/09.09.2009)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare **Mulţimi şi elemente de logică matematică** (clasa a IX-a, 3 ore), a trei dintre competențele specifice precizate în secvența de mai sus, elaborați doi itemi: un *item de tip alegere multiplă* și un *item de tip întrebare structurată* (cu trei cerințe).

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

– formatul fiecărui item elaborat în vederea evaluării competenței specifice alese;

– răspunsul așteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaborați;

– corectitudinea științifică a informației de specialitate.

Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Centrul Național de Evaluare și Examinare

EXAMENUL NAȚIONAL DE ACORDARE A DEFINITIVĂRII ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT
17 Iulie 2012

Proba scrisă
Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

VARIANTA 3

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**a)** Polinomul f are rădăcina $\hat{1}$	**3p**
	f se divide cu $X+\hat{2}$, deci f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$	**2p**
	b) De exemplu, $g = X+\hat{2}$ și $g(\hat{0}) = f(\hat{0})$, $g(\hat{1}) = f(\hat{1})$, $g(\hat{2}) = f(\hat{2})$	**3p**
	$\text{grad}\, g = 1$, deci g este ireductibil	**2p**
2.	**a)** Hexagonul are 3 laturi de lungime *a* și 3 laturi de lungime *b*, deci există un vârf din care pleacă o latură de lungime *a* și o latură de lungime *b*; fie *B* acest vârf și A, C vârfurile hexagonului adiacente lui B pentru care $AB = a$, $BC = b$	**2p**
	Rezultă că arcul mic AC are măsura de 120° și deci $m(\sphericalangle ABC) = 120^\circ$	**3p**
	b) Fie O centrul cercului circumscris hexagonului și R raza acestui cerc. Din teorema cosinusului aplicată în triunghiurile AOC și ABC rezultă că $AC^2 = 3R^2$ și $AC^2 = a^2 + b^2 + ab$	**3p**
	Finalizare: $R = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+ab}{3}}$	**2p**
3.	**a)** Pentru $k \geq 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_k(x)}{x} = +\infty$, deci graficul funcției f_k nu are asimptotă spre $+\infty$	**1p**
	Pentru $k = 1$, $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{arctg}x = \dfrac{\pi}{2}$ și	**1p**
	$n = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_1(x) - \dfrac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\text{arctg}x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{arctg}x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$	**1p**
	Din teorema lui l'Hospital, cum $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{1+x^2} = -1$, rezultă că $n = -1$ și dreapta $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică a graficului funcției f_1 spre $+\infty$; f_k are asimptotă spre $+\infty \Leftrightarrow k = 1$	**2p**
	b) $(n+1)\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx + (n-1)\int\limits_0^1 f_{n-2}(x)\,dx = \int\limits_0^1 \left((n+1)x^n + (n-1)x^{n-2}\right)\text{arctg}x\,dx =$	**1p**
	$= \left(x^{n+1} + x^{n-1}\right)\text{arctg}x\Big\vert_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{x^{n-1}\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x^n}{n}\Big\vert_0^1 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n}$	**4 p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Proiectarea corectă a itemului de tip întrebare structurată:	
	- succesiunea subîntrebărilor asigură creşterea treptată a gradului de dificultate	**3p**
	- fiecare subîntrebare solicită un răspuns care nu depinde de răspunsul la subîntrebarea precedentă	**3p**
	- subîntrebările sunt în concordanță cu stimulul utilizat	**3p**
	- subîntrebările evaluează trei competențe specifice, dintre cele precizate în secvența dată, în corelație cu tema/ conținuturile corespunzătoare	**9p**
	Notă. Punctajul se acordă şi în situația în care una dintre subîntrebări evaluează două dintre competențele specifice	
	- corectitudinea rezolvării sarcinilor de lucru ale itemului	**6p**
	- corectitudinea ştiințifică a informației matematice	**6p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

- Definirea conceptului de educație formală 4 puncte
- Definirea conceptului de educație nonformală 4 puncte
- Definirea conceptului de educație informală 4 puncte
- Analiza conceptului de educație formală 4 puncte
- Analiza conceptului de educație nonformală 4 puncte
- Analiza conceptului de educație informală 4 puncte
- Interdependența formelor educației 6 puncte

Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

EXAMENUL NAŢIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂŢĂMÂNT
18 iulie 2013
Probă scrisă
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

VARIANTA 3

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**a)** $a_1 + r = a_2 = b_2 = b_1 q = a_1 q$	**3p**
	$a_1(q-1) = r \Rightarrow q - 1 = \frac{r}{a_1} > 0 \Rightarrow q > 1$	**2p**
	b) Pentru $n \geq 2$, $b_{n+1} - a_{n+1} = b_1 q^n - a_1 - nr = a_1 q^n - a_1 - na_1(q-1) = a_1\left(q^n - 1 - n(q-1)\right)$	**2p**
	$q^n = (1+q-1)^n = 1 + C_n^1(q-1) + C_n^2(q-1)^2 + ... + C_n^n(q-1)^n > 1 + C_n^1(q-1) = 1 + n(q-1)$	**2p**
	$b_{n+1} - a_{n+1} > 0$, deci $b_k > a_k$ pentru orice număr natural $k \geq 3$	**1p**
2.	**a)** ΔABC este isoscel, deci $AD \perp BC$	**2p**
	ΔABD este dreptunghic în D şi $m(\sphericalangle B) = 30° \Rightarrow AD = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$	**3p**
	b) Fie $c = AB, b = AC, \alpha = DC$ şi $\beta = BD$; din teorema bisectoarei $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{c}{b} \Rightarrow b\beta = c\alpha$	**1p**
	Cum $c + \alpha = b + \beta$, rezultă că perechile c şi α, respectiv b și β sunt soluţii ale aceleiaşi ecuaţii de gradul al doilea	**2p**
	Dacă $c = \beta$, atunci $b = \alpha$, deci $BC = AB + AC$, fals	**1p**
	Rezultă $c = b$, deci triunghiul ABC este isoscel	**1p**
3.	**a)** $\int_0^1 (1+x) f_1(x)dx = \int_0^1 (1+x)\frac{e^x}{1+x}dx = \int_0^1 e^x\,dx =$	**2p**
	$= e^x \Big\|_0^1 = e - 1$	**3p**
	b) Avem $\left\|\int_0^1 f_n(x)dx - (e-1)\right\| = \left\|\int_0^1 f_n(x)dx - \int_0^1 e^x\,dx\right\| = \left\|\int_0^1\left(\frac{e^x}{1+x^n} - e^x\right)dx\right\| = \left\|\int_0^1\left(\frac{-x^n e^x}{1+x^n}\right)dx\right\| \leq$	**2p**
	$\leq \int_0^1 \left\|\frac{-x^n e^x}{1+x^n}\right\| dx = \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+x^n}dx \leq e\int_0^1 x^n dx = e\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1 = \frac{e}{n+1} \to 0$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = e-1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

- câte 3 puncte pentru corectitudinea formatului fiecărui item elaborat în vederea evaluării competenţei/competenţelor specifice alese $(3\text{p} \times 3\text{itemi})$	**9p**
- câte 3 puncte pentru corectitudinea modului de elaborare a răspunsului aşteptat (a baremului de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaboraţi $(3\text{p} \times 3\text{itemi})$	**9p**
- câte 4 puncte pentru corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate din fiecare item elaborat $(4\text{p} \times 3\text{itemi})$	**12p**

SUBIECTUL al III-lea	**(30 de puncte)**
- conceptul de finalități ale educației	**5 puncte** (răspuns parțial 3p)
- clasificare	**5 puncte** (răspuns parțial 3p)
- ideal	**5 puncte** (răspuns parțial 3p)
- scop	**5 puncte** (răspuns parțial 3p)
- obiective	**5 puncte** (răspuns parțial 3p)
- proceduri de operaționalizare	**5 puncte** (răspuns parțial 3p)

Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

EXAMENUL NAŢIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂŢĂMÂNT
14 iulie 2014
Probă scrisă

Matematică

Varianta 1

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerinţelor, în limita punctajului maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**a)** $f(x)=2\left(x^2-2x+1\right)+3$	**2p**
	$f(x)=2(x-1)^2+3\geq 3$ pentru orice număr real x	**3p**
	b) $(f\circ f)(x)=2\left(f(x)-1\right)^2+3$	**2p**
	Cum $x\in\mathbb{Z}$ și $\left((x-1)^2+1\right)^2\leq 4$, soluţiile întregi ale inecuației sunt 0, 1 și 2	**3p**
2.	**a)** $AD=AM$, $AM=PC$	**2p**
	$DP=CN$, deci triunghiurile dreptunghice ADP şi PCN sunt congruente	**3p**
	b) $\Delta ADP\equiv\Delta PCN\Rightarrow AP=PN$ şi $\sphericalangle DAP\equiv\sphericalangle CPN$	**1p**
	$m(\sphericalangle DPA)+m(\sphericalangle DAP)=90°\Rightarrow m(\sphericalangle DPA)+m(\sphericalangle CPN)=90°\Rightarrow m(\sphericalangle APN)=90°$	**1p**
	ΔAPN este dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle PAN)=45°$	**1p**
	$AMCP$ este paralelogram $\Rightarrow AP\parallel MC\Rightarrow m(\sphericalangle AQM)=m(\sphericalangle PAQ)=45°$	**2p**
3.	**a)** $\int_e^{e^2} f_1(x)\,dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\frac{3}{2}$	**2p**
	b) $f_n'(x)=\frac{\ln^{n-1}x\,(n-\ln x)}{x^2}$	**2p**
	$f_n'\left(e^n\right)=0$, $f_n'(x)>0$ pentru orice $x\in\left(1,e^n\right)$ şi $f_n'(x)<0$ pentru orice $x\in\left(e^n,+\infty\right)$, deci $f_n(x)\leq f_n\left(e^n\right)\Rightarrow f_n(x)\leq\frac{n^n}{e^n}$ pentru orice $x\in(1,+\infty)$ şi orice număr natural nenul n	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

- câte 4 puncte pentru corectitudinea formatului fiecărui item elaborat 4px2=**8 puncte**
- câte 4 puncte pentru corectitudinea răspunsului aşteptat (barem de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaborați 4px2=**8 puncte**
- câte 7 puncte pentru corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate pentru fiecare item elaborat 7px2=**14 puncte**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

- conceptul de învățare **10 puncte**
- condiții interne ale învățării **10 puncte**
- condiții externe ale învățării **10 puncte**

Pentru prezentare parţială a fiecăruia dintre cele trei repere menţionate mai sus se acordă câte 6 puncte.

Ministerul Educației și Cercetării Științifice
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

EXAMENUL NAŢIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂŢĂMÂNT
9 iulie 2015

Probă scrisă
Matematică

Varianta 2

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerinţelor, în limita punctajului maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**a)** $xy=0$	**3p**
	Soluţiile sistemului sunt $x=0$, $y=1$ şi $x=1$, $y=0$	**2p**
	b) $xy=\frac{m^2-1}{2}$	**2p**
	Cum x şi y sunt soluţiile ecuaţiei $t^2-mt+\frac{m^2-1}{2}=0$, sistemul are soluţie unică $\Leftrightarrow \Delta=0$, de unde obținem $m=-\sqrt{2}$ sau $m=\sqrt{2}$	**3p**
2.	**a)** $\Delta FBC\equiv\Delta FDC\ (LUL)$	**3p**
	$m(\sphericalangle CBF)=90^\circ-60^\circ=30^\circ$, deci $m(\sphericalangle CDF)=30^\circ$	**2p**
	b) $m(\sphericalangle ECB)=75^\circ$, $m(\sphericalangle ACB)=45^\circ\Rightarrow m(\sphericalangle ECF)=30^\circ$, deci $\Delta EFC\sim\Delta ECB\ (UU)$	**3p**
	$\frac{EC}{EB}=\frac{EF}{EC}\Rightarrow EC^2=EF\cdot EB$, deci $EC^2=EF\cdot BC$	**2p**
3.	**a)** $f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$f(-1)=-\frac{1}{2}$, $f(1)=\frac{1}{2}$, f este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$, crescătoare pe $[-1,1]$ şi descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$	**2p**
	b) $\int_0^1 f\left(e^x\right)dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int_0^1\frac{\left(e^x\right)'}{e^{2x}+1}dx=$	**2p**
	$=\operatorname{arctg}\left(e^x\right)\Big\|_0^1=\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Itemul de completare elaborat	
Corectitudinea formatului itemului	**5p**
Corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**5p**
Corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**5p**

Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat	
Corectitudinea formatului itemului	**5p**
Corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**5p**
Corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

- procesul de învățământ: delimitări conceptuale **4 puncte**
- învățarea: delimitări conceptuale **4 puncte**
- predarea: definirea conceptului **4 puncte**
- evaluarea: delimitări conceptuale **4 puncte**
- argumentarea necesității interacțiunii între cele trei procese **3 puncte**
- evidențierea specificității relației între:
    - învățare și predare **2 puncte**
    - învățare și evaluare **2 puncte**
    - predare și evaluare **2 puncte**
- coerența și originalitatea argumentării **5 puncte**

Ministerul Educaţiei Naționale și Cercetării Științifice
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

EXAMENUL NAŢIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂŢĂMÂNT
4 august 2016

Probă scrisă
MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

- **Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**a)** $x*7=7*y=7$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1*2*3*\ldots*2016=\left(\left(1*2*3*4*5*6\right)*7\right)*8*\ldots*2016=7*\left(8*\ldots*2016\right)=7$	**3p**
	b) $2\left(7^x-7\right)\left(\log_2 x-7\right)+7=7 \Leftrightarrow \left(7^x-7\right)\left(\log_2 x-7\right)=0$	**2p**
	$7^x-7=0 \Leftrightarrow x=1$ și $\log_2 x-7=0 \Leftrightarrow x=128$, care verifică ecuația	**3p**
2.	**a)** Triunghiurile ABM și ACN sunt dreptunghice isoscele $\Rightarrow m\left(\sphericalangle MAB\right)=m\left(\sphericalangle CAN\right)=45^\circ$	**2p**
	$m\left(\sphericalangle MAN\right)=m\left(\sphericalangle MAB\right)+m\left(\sphericalangle BAC\right)+m\left(\sphericalangle CAN\right)=45^\circ+90^\circ+45^\circ=180^\circ$, deci punctele M, A şi N sunt coliniare	**3p**
	b) $MB=AB$ şi $AM^2=AB^2+MB^2 \Rightarrow AM=AB\sqrt{2}$	**2p**
	$NC=AC$ şi $AN^2=AC^2+NC^2 \Rightarrow AN=AC\sqrt{2}$, deci $MN=AM+AN=\sqrt{2}\left(AB+AC\right)$	**3p**
3.	**a)** $f'(x)=\dfrac{4}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=-\infty$, f este crescătoare pe $(-2,+\infty)$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, deci $\operatorname{Im} f=(-\infty,1)$	**3p**
	b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_2^x f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2-4\ln\frac{x+2}{4}}{x}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x}\ln\dfrac{x+2}{4}\right)=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Itemul de completare elaborat	
Corectitudinea formatului itemului	**3p**
Corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**3p**
Corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**4p**
Itemul de tip alegere multiplă elaborat	
Corectitudinea formatului itemului	**3p**
Corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**3p**
Corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**4p**

Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat	
Corectitudinea formatului itemului	**3p**
Corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**3p**
Corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**4p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. câte 3 puncte pentru explicarea fiecăruia dintre cele două concepte date **2x3p=6 puncte**
2. câte 2 puncte pentru menționarea oricărei caracteristici a fiecăreia dintre cele două forme de educație **2x2p=4 puncte**
3. câte 2 puncte pentru enumerarea oricăror trei tipuri de curriculum **3x2p=6 puncte**
4. câte 3 puncte pentru precizarea oricăror două funcții ale evaluării școlare **2x3p=6 puncte**
5. - câte 1 punct pentru precizarea oricărui avantaj și a oricărui dezavantaj ale utilizării formei de organizare date **2x1p=2 puncte**
- câte 3 puncte pentru prezentarea fiecărui avantaj și dezavantaj precizat: prezentare adecvată – 3p.; prezentare superficială – 1p. **2x3p=6 puncte**

Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

EXAMENUL NAŢIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂŢĂMÂNT
20 aprilie 2017
Probă scrisă

MATEMATICĂ

Varianta 3

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- **Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerinţelor, în limita punctajului maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(60 de puncte)**

1.	**a)** $f(x)=2x-1$, deci $f(0)+f(1)+\ldots+f(10)=(2\cdot 0-1)+(2\cdot 1-1)+\ldots+(2\cdot 10-1)=$	**2p**
	$=2\cdot(0+1+\ldots+10)-11\cdot 1=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-11=$	**3p**
	$=110-11=99$	**2p**
	b) $\Delta=4+4\left(m^2-1\right)=4m^2$	**2p**
	$f(x)=0$ are două soluții reale distincte $\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2\neq 1\\ m^2>0\end{cases}$	**3p**
	Ecuația are două soluții reale distincte pentru orice $m\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$	**3p**
2.	**a)** ΔABD dreptunghic în D și, cum M este mijlocul laturii AB, obținem $DM=AM=BM$	**2p**
	$P_{ABCD}=2(AB+AD)=2(AM+MB+AD)=$	**2p**
	$=2(AM+DM+AD)=2P_{\Delta AMD}$	**3p**
	b) ΔBCD este dreptunghic în B și N este mijlocul laturii CD, deci $BN=\frac{CD}{2}$ și, cum $AB=CD$, obținem $BN=\frac{AB}{2}$	**2p**
	$MBCN$ este paralelogram, deci $MN=BC$ și, cum $AB=2BC$, obținem $MN=\frac{AB}{2}$	**3p**
	M este mijlocul laturii AB, deci $BM=\frac{AB}{2}\Rightarrow BM=MN=BN\Rightarrow\Delta MBN$ este echilateral	**3p**
3.	**a)** $A(0,0)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\left(A(0,0)\right)^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\left(A(0,0)\right)^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$	**3p**

	b) $\det\left(A(m,n)\right)=\begin{vmatrix} m & n & 1 \\ 1 & m & n \\ n & 1 & m \end{vmatrix}=(m+n+1)\left(m^2+n^2-mn-m-n+1\right)$	**3p**
	Cum m și n sunt numere naturale, $\det\left(A(m,n)\right)=0 \Leftrightarrow m^2+n^2-mn-m-n+1=0$	**2p**
	$(m-n)^2+(m-1)^2+(n-1)^2=0$, de unde obținem $m=n=1$	**3p**
4.	**a)** $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $f''(x)=\dfrac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
	Pentru $x\in(-\infty,-1)$, $f''(x)<0$; pentru $x\in(-1,1)$, $f''(x)>0$; pentru $x\in(1,+\infty)$, $f''(x)<0$, deci funcția f are două puncte de inflexiune	**3p**
	b) $\mathcal{A}=\int_0^1 \lvert f(x)\rvert dx=\int_0^1 \ln\left(x^2+1\right)dx=$	**2p**
	$=\int_0^1 x'\ln\left(x^2+1\right)dx=x\ln\left(x^2+1\right)\Big\|_0^1-2\int_0^1\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=$	**3p**
	$=\ln 2-2(x-\operatorname{arctg} x)\Big\|_0^1=\ln 2-2+\dfrac{\pi}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Itemul de tip alegere multiplă elaborat	
Corectitudinea formatului itemului	**5p**
Corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare), inclusiv alegerea adecvată a distractorilor	**5p**
Corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**5p**
Itemul de tip întrebare structurată elaborat	
Corectitudinea formatului itemului	**5p**
Corectitudinea răspunsului aşteptat (baremul de evaluare)	**5p**
Corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate	**5p**