GRADUL DIDACTIC II

MATEMATICĂ

1981 – 2017

CUPRINS

GRADUL II
1981

PROFESORI I

1. Noţiunea de algoritm: proprietăţi, exemple, reguli de descriere.

2. Metode pentru dezvoltarea creativităţii gândirii elevilor, specifice matematicii.

3. Să se traseze graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ şi să se determine $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $0\le f(x)\le 1$.

4. Să se calculeze cu aproximaţie de ordin cel puţin 10^{-2} soluţia reală a ecuaţiei $x^3+3x-3=0$.

5. Dacă P este o submulţime a unui plan, se notează cu $A(P)$ reuniunea axelor de simetrie ale lui P. Să se determine $A(P)$ şi $A(A(P))$ în cazul în care P este un triunghi echilateral.

PROFESORI II

1. Inelul claselor de resturi modulo n $(n\ge 2)$: să se studieze separat cazul când n este prim.

2. Posibilităţi de îmbunătăţire a sistemului actual de apreciere a cunoştinţelor elevilor.

3. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\ge 1+\sqrt{4-x^2}$.

4. Să se reprezinte grafic funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|-1}{x-1}, & \text{dacă } x\ne 1\\ 2, & \text{dacă } x=1\end{cases}$.

5. Se consideră un plan raportat la un sistem ortogonal de axe xOy şi punctele $A(1,1)$, $B(3,0)$. Să se determine locul geometric al punctelor M din plan astfel încât $MA=2\cdot MB$.

GRADUL II
1982

PROFESORI I

1. Prelucrarea statistică a datelor. Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare.

2. Rolul problemelor în însuşirea matematicii.

3. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y'' - y' = x + \sin x.$$

4. Să se calculeze volumul corpului din spaţiu definit prin

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 1.$$

5. Să se rezolve problema următoare:

Fiind dat un unghi xOy şi un punct A în interiorul lui, să se construiască o dreaptă trecând prin A care să formeze cu laturile unghiului xOy un triunghi de arie minimă.

Să se reformuleze apoi enunţul prin mai multe întrebări ajutătoare bine gradate.

PROFESORI II

1. Sisteme de ecuaţii liniare.

2. Rolul problemelor în însuşirea matematicii.

3. Să se reprezinte grafic funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| \cdot e^{-x}$.

4. Să se rezolve problema următoare şi apoi să se explice modul cum trebuie prezentată rezolvarea la clasă:

Diagonalele $|AC|$ şi $|BD|$ ale unui trapez $ABCD$ sunt congruente şi sunt situate pe bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAD$ şi $\sphericalangle ABC$. Să se arate că $|AD| \equiv |DC| \equiv |CB|$.

5. Să se afle parametrul complex m şi să se rezolve ecuaţia $x^3 - 2ix + m = 0$ ştiind că una din soluţiile ei este $x_1 = 1 + i$.

GRADUL II
1983

PROFESORI II

1. Fie polinomul $P = X^{2n} + aX^n + b$ ($a,\ b \in \mathbb{R},\ n \geq 1$). Să se determine a şi b astfel încât P să fie divizibil cu $(X-1)^2$ şi să se arate că P nu poate avea rădăcini triple nenule.

2. Să se traseze graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - \sin^2 x$ şi să se calculeze aria mărginită de grafic, axa Ox şi dreptele $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, M este mijlocul muchiei AB iar N mijlocul lui AD. Să se arate că planul determinat de punctele M, N, A' este tangent sferei înscrise în cub.

4. Metode de abordare a problemelor de geometrie în clasele V-VIII.

GRADUL II
1984

PROFESORI II

1. Să se arate că $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_3 \pi} + \frac{1}{\log_4 \pi} < 3 < \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_4 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}$.

2. Pe laturile AB şi BC ale triunghiului ABC se construiesc în afară pătratele $ABFH$ şi $BCDK$. Să se arate că prelungirea medianei BE a triunghiului ABC este înălţime în triunghiul BFK.

3. Să se arate că dacă $0 < x < \frac{\pi}{2}$, atunci $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$.

4. Utilizarea problemelor cu conţinut practic în predarea noţiunii de funcţie.

GRADUL II
1985

PROFESORI II

1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$.

2. Să se determine condiţiile necesare şi suficiente verificate de parametri reali a_i, b_i, c_i, μ şi λ, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 1$ pentru ca să existe şi să fie egală cu 1 limita

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i x^2+b_i x+c_i}-\lambda x-\mu\right).$$

3. Fie ABC un triunghi, M mijlocul lui $[BC]$, A' punctul de tangenţă a cercului înscris în triunghi cu latura BC.

- **a)** Dacă A'' este simetricul lui A' faţă de M şi E este intersecţia mediatoarei lui $[BC]$ cu AA'', atunci EM este egală cu raza cercului înscris în triunghi.
- **b)** Să se construiască triunghiul ABC cunoscând poziţia în plan a punctelor A, M şi A'.

4. Daţi câteva exemple de teoreme de geometrie care admit reciproce adevărate, precum şi de teoreme care nu admit asemenea reciproce.

GRADUL II
1986

PROFESORI II

1. Fie a, b, $c \in \mathbb{R}_+^*$ şi propoziţia

$$p : \text{„}\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c\text{''}$$

Se cere să se arate dacă p este adevărată sau falsă.

2. Notăm cu K mulţimea matricelor $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

a) Să se arate că mulţimea K este grup comutativ în raport cu înmulţirea matricelor.

b) Pentru x dat, să se calculeze $[A(x)]^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este fixat.

3. Să se arate că două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$ sunt congruente dacă şi numai dacă există o izometrie $f : \triangle ABC \to \triangle A'B'C'$.

4. Inducţia şi deducţia.

GRADUL II
1987

PROFESORI II

1. Să se arate că singurul număr prim de forma $n^4 + 4^n$, unde n este un număr natural nenul, este 5.

2. Se consideră un paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$ cu toate feţele congruente.

a) Să se arate că paralelipipedul are toate muchiile congruente.

b) Să se calculeze volumul lui $ABCDA'B'C'D'$ în funcţie de $AB = a$ şi $m(\sphericalangle ABC) = \theta$.

c) Să se arate că $ABCDA'B'C'D'$ este cub dacă şi numai dacă i se poate circumscrie o sferă.

3. Să se reprezinte grafic funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max(x, x^2)$ şi să se precizeze punctele unde f este derivabilă.

4. Teorema directă, teorema reciprocă. Condiţia necesară şi condiţia suficientă.

GRADUL II
1988

PROFESORI I

1. Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere reale încât $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, iar (x_n) definit prin

$$a_n x_{n+1} - (a_n + b_n) x_n + b_n x_{n-1} = 0,$$

cu $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

a) Să se arate că (x_n) este convergent dacă şi numai dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{b_k}{a_k}$ este convergentă.

b) În cazul $a_k = 1 - \dfrac{1}{2k}$ cu $k \in \mathbb{N}^*$ şi $b_k = -x^2$ cu $x \neq 0$, să se determine x încât (x_n) să fie convergent.

c) Să se calculeze limita şirului (x_n) în cazul în care $b_k = x$ $(x \neq 0)$ şi $a_k = 1$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

2. **a)** Metoda inducţiei matematice. Aplicaţii.

b) Fie $n_0, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ divizibile prin $p \in \mathbb{N}$ cu $p > 2$. Fie $b \in \mathbb{N}$, $b > 2$ şi $u_{i0}u_{i1}\ldots u_{ik}$ reprezentarea numărului n_i în baza b. Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} u_{00} & u_{01} & \ldots & u_{0k} \\ u_{10} & u_{11} & \ldots & u_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{k0} & u_{k1} & \ldots & u_{kk} \end{vmatrix}$$

este divizibil prin p.

3. Fie (t) tangenta în punctul $(0, b)$ la elipsa de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Să se afle locul geometric al punctelor de unde se pot duce la elipsa considerată tangente care determină pe (t) (prin intersecţie) un segment de lungime dată.

PROFESORI II

1. Să se determine grupurile neizomorfe cu patru elemente.

2. Pentru ce valori ale parametrului real a, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de $f(x) = xe^{ax}$, $x \in \mathbb{R}$ este crescătoare pe intervalul $[-1, 1]$?

Să se reprezinte grafic f în cazul $a = 1$.

Să se calculeze aria domeniului cuprins între axa Ox, dreapta $x = 1$ şi graficul funcţiei f.

3. Pe baza BC a unui triunghi oarecare ABC se ia un punct D. Se circumscriu celor două triunghiuri ABD şi ACD două cercuri de centre O_1, respectiv O_2.

a) Să se arate că raportul razelor acestor două cercuri este constant.

b) Să se determine poziţia pe care trebuie să o aibă punctul D pentru ca aceste raze să fie minime.

c) Să se arate că $\triangle AO_1O_2 \sim \triangle ABC$.

4. Demonstraţia matematică prin analiză şi sinteză.

GRADUL II
1989

PROFESORI I

1. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definită prin $f(x) = |\ln x|$.

a) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)\ dx$.

2. Fie G o mulţime nevidă înzestrată cu o operaţie notată multiplicativ şi având proprietăţile:

(i) operaţia este asociativă;

(ii) este valabilă simplificarea la stânga;

(iii) există $a \in G$ încât $x^3 = axa$ pentru orice $x \in G$.

Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

3. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare circumscris elipsei de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Să se arate că:

$$\sigma[AOB] + \sigma[OCD] = \sigma[OBC] + \sigma[OAD].$$

PROFESORI II

1. Fie funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin: $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ şi $g(x) = x^2 - 4x + 4$.

Să se studieze continuitatea funcţiilor compuse $f \circ g$ şi $g \circ f$.

2. **a)** Să se demonstreze că dacă numărul $2^n + 1$ este prim, atunci n este o putere a lui 2.

b) Să se determine valorile naturale ale lui m, ştiind că polinomul $(X-1)^m - X^m + 1$ se divide cu $X^2 - X + 1$.

c) Inegalităţi. Probleme de maxim şi minim. Metodica predării acestora.

3. Se consideră un semicerc de diametru AB şi M un punct pe acest semicerc. Dacă O este mijlocul lui AB, iar C este mijlocul semicercului dat, să se determine poziţia lui M astfel încât patrulaterul $ONPQ$, unde $\{N\} = OM \cap BC$, $\{P\} = AM \cap BC$ şi $\{Q\} = AM \cap OC$, să fie inscriptibil.

GRADUL II
1990

BUCUREŞTI
PROFESORI I

1. **a)** Continuitatea: condiţii echivalente exprimate în limbaj de vecinătăţi, de ϵ şi δ, de şiruri.

b) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de astroida $x^{2\beta} + y^{2\beta} = a^{2\beta}$, $a > 0$.

2. **a)** Teorema împărţirii cu rest la polinoame.

b) Să se arate că orice parte stabilă nevidă şi finită a unui grup este subgrup.

3. **a)** Elipsa.

b) Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Fie E mijlocul muchiei AB şi F mijlocul lui AD. Planul $(A'EF)$ este tangent la sfera înscrisă în cub? Justificaţi răspunsul.

PROFESORI II

1. **a)** Numere prime. Teorema fundamentală a aritmeticii.

b) Fie $a, b \in \mathbb{Z}$. Să se arate că $a^2 + b^2$ este divizibil cu 7 dacă şi numai dacă a şi b sunt divizibile cu 7.

2. **a)** Binomul lui Newton.

b) Să se calculeze suma:

$$S_n = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \ldots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n}.$$

3. **a)** Linii remarcabile în triunghi.

b) Care este condiţia ca două cercuri situate în două plane paralele să fie situate pe aceeaşi sferă?

TIMIŞOARA
PROFESORI I

1. Fie $f : [0, 3] \to [-1, 1]$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}, & \text{dacă } x \in [0, 1], \\ -\sqrt{-x^2 + 4x - 3}, & \text{dacă } x \in (1, 3]. \end{cases}$$

Se cere:

a) mulţimea $D = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ este derivabilă în } x\}$;
b) să se determine punctele de extrem local ale lui f;
c) să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea lui f;
d) să se afle numărul rădăcinilor reale (în funcţie de $m \in \mathbb{R}$) pentru ecuaţia $f(x) = mx$.

2. Fie M mulţimea matricelor pătratice de ordinul al doilea de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) $(M, +)$ este grup comutativ;
b) submulţimea M^* a matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a > 0$, înzestrată cu operaţia de înmulţire formează grup comutativ;
c) aplicaţia $f : M \to M^*$ definită prin

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & ye^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}$$

este izomorfism între $(M, +)$ şi $(M^*, \cdot)$.

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu latura a.

a) Fie P mijlocul lui $[BC']$ şi Q proiecţia ortogonală a lui P pe diagonala BD'. Să se arate că:
  (i) PQ este perpendiculara comună a dreptelor $B'C$ şi BD'; calculaţi PQ.
  (ii) punctele A, Q şi P sunt coliniare.
b) Un plan α paralel cu (ABC) intersectează segmentele (AB'), (CB'), (CD') şi respectiv (AD') în punctele E, F, G, H. Se cere:
  (i) să se arate că perimetrul patrulaterului $EFGH$ nu depinde de planul α.
  (ii) să se determine poziţia planului α astfel încât aria patrulaterului $EFGH$ să fie maximă.

4. Metode de demonstraţie a teoremelor: metoda directă, contrapoziţia, metoda indirectă (reducere la absurd); prezentare, proprietăţi logice pe care se bazează, exemplificări.

PROFESORI II

1. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 2x + 6}{x^2 + 3}$. Se cere:

a) poziţia graficului lui f faţă de asimptota oblică;
b) aria determinată de graficul lui f, asimptota oblică şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 3\sqrt{5}$;
c) să se demonstreze inegalitatea

$$\arctan\sqrt{3} + \arctan\sqrt{5} - \arctan\sqrt{15} > 0,$$

utilizând punctul anterior.

2. Să se discute şi să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (3a-1)x + 2ay + (3a+1)z = 1 \\ 2ax + 2ay + (3a+1)z = b \\ (a+1)x + (a+1)y + 2(a+1)z = b^2 \end{cases},$$

unde a, $b \in \mathbb{R}$.

3. Pe laturile AB, AC ale triunghiului $\triangle ABC$ se costruiesc în afară pătratele $ABDE$ şi $ACFG$ având centrele Q_1 şi Q_2 (vârfurile D, F sunt opuse lui A). Fie $\{I\} = BG \cup CE$. Arătaţi că:

a) $[BG] \equiv [CE]$ şi $BG \perp CE$;

b) Q_1Q_2 este mediatoarea segmentului (AI);

c) mediana $[AM]$ a triunghiului $\triangle ABC$ este înălţime în triunghiul $\triangle AEG$ şi $EG = 2AM$.

4. Rolul exemplelor în matematică pentru stabilirea consistenţei unei definiţii şi al contraexemplelor pentru stabilirea propoziţiei $P \to Q$ (Q este independentă de P). Exemplificare.

IAŞI
PROFESORI I

1. Să se stabilească o relaţie de recurenţă pentru calculul integralelor: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\, dx$ şi $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\, dx$.

2. Să se definească pe $I = (-1, 1)$ o operaţie binară "$\star$" astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to I$, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ să fie un izomorfism al grupurilor $(\mathbb{R}, +)$ şi $(I, \star)$.

3. Se consideră un tetraedru $ABCD$ şi $M \in \text{int}(ABC)$. Paralelele prin A, B, C la MD intersectează planele (BCD), (ACD), (ABD) în punctele N, P, respectiv Q. Se consideră propoziţia:

$$(S) \qquad vol[MNPQ] = 3 \cdot vol[ABCD].$$

Se cere:

a) Să se demonstreze (S) pentru un caz particular;

b) Să se formuleze şi să se demonstreze o analogă plană (P) a lui (S); discuţie asupra accesibilităţii problemei (P);

c) Prezentaţi modalităţi de construcţie a punctelor N, P, Q în plane convenabil alese, reformulaţi (S) ca o problemă plană şi rezolvaţi-o.
Precizaţi ce alte teoreme de geometrie plană vă sunt utile. (Analizaţi cazul în care M este centrul de greutate al triunghiului $\triangle ABC$).

PROFESORI II

1. Se consideră şirul (a_n) cu $a_n = 2n^2 - 3n + 4$. Să se arate că:

a) dacă un număr din şir se divide cu 4, atunci numărul următor mărit cu 1 se divide cu 4;

b) din trei termeni consecutivi, doi se divid cu 3.

2. Se consideră ecuaţia $x^2 - 55x + 21 = 0$. Se cere:

a) să se arate că ecuaţia admite două rădăcini al căror produs este 1;

b) să se calculeze rădăcinile de la punctul anterior.

3. **a)** Să se schiţeze un proiect de lecţie pentru prezentarea noţiunii de centru de greutate al unui tetraedru.

b) Demonstraţi toate propoziţiile de geometrie plană necesare în abordarea punctului precedent.

CRAIOVA
PROFESORI I

1. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

(i) f este continuă pe $\mathbb{R}$;

(ii) g este monotonă pe $\mathbb{R}$;

(iii) $f(x) = g(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.

Să se arate că $f = g$.

2. Se consideră inelul matricelor $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că nu există matrice $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AB - BA = I_n$.

b) Dacă A este o matrice din $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$, să se determine matricele X din $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $X = \dfrac{1}{2}X$.

3. Să se studieze dacă este adevărată propoziţia: ”Există un triunghi $\triangle ABC$ cu proprietatea că $m(\sphericalangle A) > 60°$ şi $\sqrt{3}(\cot B + \cot C) = 2$”.

4. **a)** Teorema directă şi teorema reciprocă; condiţii necesare şi suficiente - aspecte metodice.

b) Daţi exemple de teoreme cu o unică reciprocă adevărată, cu o unică reciprocă falsă şi cu mai multe reciproce.

PROFESORI II

1. Metoda inducţiei matematice. Aspecte metodice. Indicaţi trei exemple de aplicaţii ale acestei metode în geometrie sau trigonometrie.

2. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ rădăcinile de ordinul n ale unităţii. Să se calculeze:

$$S_k = z_1^k + z_2^k + \ldots + z_n^k,$$

cu $k \in \mathbb{N}^*$.

3. **a)** Pe un cerc se consideră două puncte fixe, A şi B, iar M un punct mobil. Pe prelungirea segmentului $[AM]$ în afara cercului se consideră punctul N astfel încât $MN = MB$. Se cere locul geometric al punctului N.

b) Să se arate că triunghiul $\triangle ABC$ în care are loc inegalitatea:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$$

este ascuţitunghic.

BRAŞOV
PROFESORI II

1. **a)** Se dă triunghiul ascuţitunghic ABC înscris într-un cerc. Tangentele la cerc în punctele A, B, C se întâlnesc două câte două respectiv în punctele C', A', B' (tangenta în A se întâlneşte cu tangenta în B în punctul C' ş.a.m.d.). Să se arate că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

b) Să se exprime aria triunghiului $A'B'C'$ în funcţie de elementele triunghiului ABC.

c) Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului iniţial astfel încât acesta să fie asemenea cu cel determinat de tangentele la cerc.

2. Să se stabilească dacă mulţimea $M = \{2^m \cdot 3^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ înzestrată cu legile de compoziţie (pe rând):

a) $a \top b = c.m.m.d.c.(a, b)$;

b) $a \perp b = c.m.m.m.c.(a, b)$, formează grupuri abeliene.

c) Noţiunile de: grup, subgrup, omomorfism de grupuri. Definiţii. Exemple.

3. Învăţarea prin descoperire la lecţiile de algebră.

CLUJ
PROFESORI II

1. **a)** **(i)** Să se afle trei numere pozitive în progresie aritmetică crescătoare, ştiind că suma pătratelor acestor numere este 35 şi că adunând celor trei numere respectiv pe 1, 1, 3 se obţin trei numere în progresie geometrică.

(ii) Să se determine coeficienţii m, n, p ai polinomului $P(X) = X^5 - 9X^4 + 24X^3 + mX^2 + nX + p$ astfel încât cele trei numere aflate mai sus să fie rădăcini ale ecuaţiei $P(x) = 0$ şi să se rezolve această ecuaţie.

b) În triunghiul isoscel ABC se consideră punctul variabil M pe baza BC; notând cu B' şi C' proiecţiile ortogonale ale lui M pe AC respectiv pe AB iar cu O mijlocul lui AM şi Q mijlocul lui BC, să se arate că:

(i) $OB' = OC' = OQ$;

(ii) punctele A, C', M, Q şi B' sunt situate pe un acelaşi cerc;

(iii) $MB' + MC' = k$ (k un număr constant).

2. Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică. Exemple.

GRADUL II
1991

BUCUREŞTI
PROFESORI I

1. **a)** Continuitatea uniformă (definiţie şi teorema privind continuitatea uniformă a funcţiilor continue pe un interval compact).

b) Să se determine punctele de continuitate ale funcţiei

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2}, & \text{dacă } x\notin\mathbb{Q},\\ \left[x+\dfrac{1}{2}\right], & \text{dacă } x\in\mathbb{Q}\end{cases}.$$

c) Să se arate că $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1}, & \text{dacă } x\in[0,1),\\ 1, & \text{dacă } x=1,\\ \ln x, & \text{dacă } x\in(1,2]\end{cases}$ este integrabilă pe $[0,2]$ şi să se calculeze $I=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

2. **a)** Noţiunea de subgrup. Teorema lui Lagrange. Să se arate că pentru orice subgrup G de ordin n şi $x\in G$, avem $x^n=e$, unde e este elementul unitate al grupului.

b) Fie w o rădăcină reală a ecuaţiei $x^2+x+1=0$ şi $\mathbb{Z}[w]=\{a+bw\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$. Pentru $z\in\mathbb{Z}[w]$, fie $\varphi(z)=z\cdot z$. Să se arate că $\mathbb{Z}[w]$ este un subgrup al lui $\mathbb{C}$ şi să se determine elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}[w]$.

c) Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$. Să se arate că dacă există $k\in\mathbb{N}^*$ cu $A^k=O_2$, atunci $A^2=O_2$.

3. **a)** Transformatul prin inversiune al unui cerc.

b) Fie familia de conice $x^2+axy+y^2-6x-16=0$, unde $a\in\mathbb{R}$. Se cere să se discute natura şi genul conicelor din familie, după valorile parametrului a.

c) Fie M un punct variabil pe latura AB a triunghiului $\triangle ABC$. Paralela prin M la BC intersectează latura AC în punctul N. Fie Q respectiv P proiecţiile ortogonale ale punctelor M respectiv N pe BC. Să se afle locul geometric al centrului dreptunghiului $MNPQ$.

PROFESORI II

1. **a)** Teorema lui Lagrange privind funcţiile derivabile (enunţ şi demonstraţie).

b) Să se determine mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3+x^2-1, & \text{dacă } x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & \text{dacă } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}.$$

c) Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ este integrabilă pe $[0,1]$ şi să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

2. **a)** **(i)** Teorema împărţirii cu rest a polinoamelor cu coeficienţi complecşi.

(ii) Să se determine restul împărţirii polinomului $P=(x+1)^{6n+1}+x^{6n+2}$ la $x(x^2+x+1)$.

b) Fie $n\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea că n şi $2n+1$ nu sunt divizibile cu 3. Să se arate că $4n+1$ este divizibil cu 3.

c) Să se demonstreze că

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1,$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

3. **a)** Teorema lui Ceva (directă şi reciproca).

b) Fie $[AM]$ şi $[CD]$ două segmente congruente din plan. Să se găsească locul geometric al punctelor M din plan pentru care

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2.$$

c) Lungimea muchiei unui cub este a. Să se afle distanţa de la o diagonală a cubului la o diagonală a feţei cu care aceasta nu se intersectează.

TIMIŞOARA
PROFESORI I

1. **a)** Definiţi noţiunea de mulţime compactă şi enunţaţi teorema de caracterizare a mulţimilor compacte din $\mathbb{R}^n$.

b) Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+\sin x, & \text{dacă } x\geq 0,\\ x, & \text{dacă } x<0\end{cases}$. Să se arate că există $m, M\in\mathbb{R}$ cu $m<M$ încât $f([0,1])=[m,M]$.

c) Să se arate că există o unică funcţie $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $[f(x)]^3+xf(x)=1$, pentru orice $x>0$. Să se demonstreze că f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$.

d) Să se facă o prezentare metodică a legăturii dintre monotonie şi limite la şirurile reale (enunţuri fără demonstraţie cu precizări privind teorema directă, reciproca, etc. şi exemple).

2. Pe mulţimea A a matricelor reale de forma $X=\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ cu a, b, $c\in\mathbb{R}$ se consideră operaţiile uzuale de adunare şi de înmulţire a matricelor.

a) Să se cerceteze care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate şi să se justifice răspunsul:

(i) $A(+,\cdot)$ este un inel;

(ii) $(A,\cdot)$ este un grup;

(iii) $(A,\cdot,+)$ este un inel;

(iv) există $x\in A$ şi $n\in\mathbb{N}^*$ încât $n^3x^2-n^2x=0$.

b) Să se determine x^n cu $n\in\mathbb{N}^*$ în cazul $c=ab$.

c) Discutaţi din punct de vedere metodic problema determinării numărului rădăcinilor reale ale ecuaţiei $x^3+ax^2+bx+m=0$, unde a, $b\in\mathbb{R}$, iar m un parametru real. Aplicaţie pentru ecuaţia $x^3-3x^2+m=0$.

3. **a)** Fie A, B, C, D puncte dintr-un spaţiu euclidian.

(i) Dacă A, B, C şi D sunt necoplanare şi $(AC)\equiv(AD)\equiv(BC)\equiv(BD)$, atunci $AB\perp CD$.

(ii) Să se arate că

$$\sigma[ABC]\leq\sigma[ABD]+\sigma[BCD]+\sigma[CAD].$$

Precizaţi o condiţie necesară pentru ca inegalitatea să devină egalitate. Este această condiţie suficientă? Precizaţi analogul plan al acestui rezultat.

b) În planul euclidian $\mathscr{E}_2$ raportat la reperul ortonormal $R(O,(i,j))$ se consideră aplicaţia $f_{\alpha,\beta}:\mathscr{E}_2\to\mathscr{E}_2$ ale cărei ecuaţii în raport cu R sunt date de $x'=\alpha y+2$, $y'=\beta x+2$ cu α, $\beta\in\mathbb{R}$. Se cere:

(i) să se determine α, $\beta\in\mathbb{R}$ încât aplicaţia să fie o izometrie şi să se precizeze tipul aplicaţiilor $f_{1,-1}$ şi $f_{-1,-1}$;

(ii) să se afle ecuaţia lui $f_{-1,-1}(\mathscr{C})$, unde $\mathscr{C}$ este conica de ecuaţie $x^2+4y^2-4x-16y+16=0$ în raport cu R şi să se deducă natura conicei $\mathscr{C}$.
Enunţaţi axioma unghiului în sistemul lui Birkhoff şi o teoremă în a cărei demonstraţie se foloseşte axioma de construcţie a unghiurilor, precizând modalitatea în care se face această utilizare.

PROFESORI II

1. **a)** Să se reprezinte grafic funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}, & \text{dacă } x\geq 0\\[2ex] \dfrac{x^2}{x-2}, & \text{dacă } x<0\end{cases}$.

b) Continuitatea uniformă a funcţiilor reale de o variabilă reală (definiţie şi proprietăţi fără demonstraţie). Să se studieze continuitatea şi continuitatea uniformă a funcţiei $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definită prin
$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\in[-1,0]\cup(0,1]\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$.

c) Să se prezinte metodic (fără demonstraţie) teoremele lui Fermat, Rolle şi Lagrange.

2. **a)** Se dau numerele $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$ şi $y = \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$. Să se arate că $x + y = 2$ şi să se demonstreze că $x^n + y^n$ se divide cu 8, pentru orice număr $n \geq 4$.

b) Să se determine mulţimea S a soluţiilor reale ale sistemului:

$$\begin{cases} x\sqrt{yz} = 4 \\ y\sqrt{xz} = 9 \\ z\sqrt{xy} = 16 \end{cases}$$

şi să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

A) S este infinită;

B) S are cel mult un element;

C) $S = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right)\right\}$;

D) $S = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{27}{8}, -\frac{32}{3}\right)\right\}$;

E) pentru orice $(x, y, z) \in S$, avem $xyz = 24$.

c) Să se determine mulţimile A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ şi $A \times (B - A)$, unde

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \log_n 2 \cdot \log_2 \sqrt[n]{n} + n \cdot \log_4 \sqrt[n]{4} \leq 8 \cdot \log_n \sqrt[n]{2}\},$$

$$B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid x^2 + 2(n-1)x + n^2 - 3n + 8 > 0, (\forall)\, x \in \mathbb{R}\}.$$

d) Determinanţi (definiţie şi metode de calcul). Expunere metodică. Aplicaţie: să se calculeze prin două metode determinantul:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

3. **a)** Fie cercurile $\mathscr{C}_1(O_1; r_1)$ şi $\mathscr{C}_2(O_2; r_2)$ secante în A şi B. O secantă variabilă trecând prin A taie $\mathscr{C}_1$ în M şi $\mathscr{C}_2$ în N. Se cere:

(i) Să se arate că $m(\sphericalangle MBN)$ este constantă.

(ii) Fie $P \in \mathscr{C}_1$, $Q \in \mathscr{C}_2$ şi o secantă ce trece prin B încât $PQ \parallel MN$. Să se demonstreze că $MNPQ$ este paralelogram.

(iii) Să se determine poziţia secantei MN astfel încât distanţa MN să fie maximă.

(iv) Dacă $\mathscr{C}_2$ trece prin O_1 şi notăm cu C şi D punctele de contact ale tangentelor comune la aceste cercuri cu $\mathscr{C}_2$, să se demonstreze că dreapta CD este tangentă la $\mathscr{C}_1$.

b) Definiţi paralelismul dreptelor în plan, enunţaţi axioma paralelelor şi două teoreme în a căror demonstraţie se foloseşte această axiomă, precizând modul în care se face această utilizare. Schiţaţi un plan de lecţie care să reflecte această problematică.

IAŞI
PROFESORI I

1. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{e^x-1}, & \text{dacă } x\in(0,1],\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$. Să se arate că f este integrabilă Riemann pe $[0,1]$ şi să se determine valoarea integralei.

2. Fie $(\mathbb{R},+)$ grupul aditiv al numerelor reale şi $(K,+,\cdot)$ un corp comutativ. Fie f_1, f_2, …, $f_n:(\mathbb{R},+)\to(K^*,\cdot)$ n morfisme de grupuri. Să se arate că în K are loc egalitatea:

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & \dots & f_n(0)\\ f_1(1) & f_2(1) & \dots & f_n(1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_1(n-1) & f_2(n-1) & \dots & f_n(n-1)\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}[f_i(1)-f_j(1)].$$

3. Cercul lui Euler: definiţie, centrul, raza, aspecte metodice în predare, aplicaţii.

PROFESORI II

1. Să se calculeze integrala:

$$f(u)=\int_0^1 (x^2+2x\cos u+1)^{-1}\,dx,\ \ u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

şi să se studieze continuitatea funcţiei f în $u=0$.

2. Pentru $a>0$ şi $a\neq 1$, să se rezolve inecuaţia:

$$\log_a(1-8a^{-x})\ge 2(1-x).$$

3. **a)** Volumul conului: predare în gimnaziu.

b) Să se determine raza bazei şi înălţimea conului circular drept de volum maxim înscris într-o sferă de rază R.

CLUJ-NAPOCA
PROFESORI I

1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{dacă } x \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă } x = (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$. Studiaţi continuitatea, existenţa derivatelor parţiale şi diferenţiabilitatea funcţiei f în punctul $(0,0)$.

2. Se dă $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+y, y-z, x+y+z)$.

a) Să se verifice că f este o aplicaţie liniară.

b) Să se determine matricea lui f în baza canonică $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

3. Într-un con circular drept se înscrie o sferă astfel încât cercul de tangenţă dintre ele este baza unui cilindru înscris în sferă. Raportul dintre aria sferei şi aria totală a conului este $\frac{4}{9}$. Să se determine raportul dintre volumul cilindrului şi volumul conului.

4. Metoda inducţiei. Inducţia matematică; exemple din diferite capitole ale programei şcolare.

PROFESORI II

1. Se consideră un număr dat $a \in [0,1]$ şi se consideră un şir (x_n) definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a + x_n^2)$ cu $x_0 = 0$. Să se demonstreze că acest şir este convergent şi să i se afle limita.

2. **a)** Metodica predării noţiunii de ecuaţie.

b) Se dau numerele 123_b, 140_b, 156_b scrise în baza b. Ştiind că acestea sunt în progresie aritmetică, să se determine baza b.

3. Se dă triunghiul $\triangle ABC$, $AB = AC = l$, $BC = 2a$, iar O centrul cercului tangent în B, C respectiv la AB, AC. Se cere:

a) Să se exprime aria acestui disc în funcţie de a şi l.

b) Să se demonstreze că patrulaterul $ABOC$ este inscriptibil.

CRAIOVA
PROFESORI I

1. **a)** Teorema lui Fermat (relativă la extremele funcţiilor). Enunţ, demonstraţie, aspecte metodice.

b) Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{\pi} \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiţie al lui f. Se cere:

(i) reprezentarea grafică a funcţiei f;

(ii) să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$;

(iii) să se studieze convergenţa şirului

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ a_n = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}})\left(\frac{1}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}^*$$

şi, în caz de convergenţă, să se calculeze limita sa.

2. **a)** Să se determine automorfismele corpurilor $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{R}$ înzestrate cu operaţiile uzuale.

b) Fie polinomul $P(X) = X^{2n} - 1$, unde $n \geq 2$. Se cere:

(i) Să se descompună P în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$ şi $\mathbb{R}[X]$.

(ii) Dacă α_i, α_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sunt rădăcinile complexe ale lui P, atunci: $\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} [(1-\alpha_i)(1-\alpha_i)] = n$.

(iii) Să se verifice identitatea:

$$\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

3. Să se determine locul geometric al punctelor din plan care au suma distanţelor la două drepte date, din acelaşi plan, constantă.

a) Soluţie sintetică.

b) Soluţie analitică.

BRAŞOV
PROFESORI I

1. Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \int_0^1 \left|x^2 + a\right| \, dx$. Se cere:

- **a)** să se calculeze $F(a)$;
- **b)** să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei F;
- **c)** să se determine valoarea minimă a funcţiei F.

2. **a)** Grupuri cu patru elemente.

- **b)** Să se demonstreze că ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, $c \in \mathbb{R}$, are rădăcinile cu partea reală negativă dacă şi numai dacă a, b, $c > 0$ şi $ab > c$.
- **c)** Să se determine poziţia punctului $P(\alpha, \beta)$, astfel încât ecuaţia $x^3 + (6 - \alpha^2 - \beta^2)x^2 + x + 2\alpha - 2\beta^2$ să aibă astfel de rădăcini.

3. Să se prezinte mai multe demonstraţii ale concurenţei medianelor unui triunghi.

BRAŞOV
PROFESORI II

1. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchiile de lungime a, se duce prin punctul $M \in [AC']$ un plan perpendicular pe AC'.

a) Să se precizeze forma secţiunii în cub în funcţie de $AM = x$.

b) Să se calculeze aria secţiunii pentru $x \in \left(0, \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right]$.

c) Să se calculeze aria secţiunii pentru $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. **a)** Să se rezolve ecuaţia $E(x) = x^8 - 2x^4 + 1 = 0$.

b) Să se arate că $M = \{x \in \mathbb{C} \mid E(x) = 0\}$ poate fi organizată ca grup multiplicativ.

c) Să se găsească toate subrupurile acestui grup.

3. Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris în cercul de rază R.

4. Aspecte metodice ale predării teoremei lui Pitagora.

CRAIOVA
PROFESORI II

1. Teorema celor trei perpendiculare. Enunţ, demonstraţie, reciproce, aspecte metodice.

2. Să se determine rădăcinile întregi ale ecuaţiei $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$.

3. Fie A o mulţime nevidă finită şi $f : A \to A$ o funcţie.

a) Să se arate că afirmaţiile:

(i) f este injectivă;

(ii) f este surjectivă;

(iii) f este bijectivă;

sunt echivalente;

b) Să se determine numărul total de funcţii $f : A \to A$;

c) Să se determine numărul total de funcţii $f : A \to A$ injective.

4. Fie ABC un triunghi echilateral şi M un punct în interiorul său. Fie A_1, B_1, C_1 proiecţiile lui M pe laturile BC, CA, AB.

a) Să se arate că suma $MA_1 + MB_1 + MC_1$ este constantă. Precizaţi constanta în funcţie de latura triunghiului.

b) Formulaţi şi demonstraţi enunţul analog în cazul spaţiului.

c) Să se arate că $AC_1 + BA_1 + CB_1$ este constantă.

d) Determinaţi poziţia lui M pentru care aria triunghiului $A_1B_1C_1$ este maximă.

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|e^{-|x|}$. Se cere:

a) Graficul funcţiei f.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\, dx$.

GRADUL II
1992
PROFESORI I

1. Se consideră funcţia $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [-2, -1) \\ 0, & \text{dacă } x = -1 \\ xe^x, & \text{dacă } x \in (-1, 0) \\ \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ \dfrac{1}{2} + \sqrt{1-x}, & \text{dacă } x \in (1, 2] \end{cases}.$$

Se cere:

a) Să se arate că f este derivabilă în $x = 0$ şi să se calculeze $f'(0)$.

b) Să se demonstreze că f nu este derivabilă de două ori în $x = 0$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de coordonate $(0, 0)$.

d) Să se reprezinte grafic funcţia f.

2. **a)** Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiei $x^3 + x^2 - 1 = 0$. Să se calculeze $x_1^{10} + x_2^{10} + x_3^{10}$.

b) Fie K un corp cu un număr finit q de elemente. Să se arate că:

(i) există un număr prim $p > 1$ şi un număr natural n astfel ca $q = p^n$;

(ii) orice funcţie $f : K \to K$ este polinomială.

3. Se consideră familia de conice $x^2 + (m^2 + 1)my^2 + 2x + 1 - m = 0$.

a) Să se discute după $m \in \mathbb{R}$ natura conicelor.

b) Pentru ce valori ale lui m conica devine hiperbolă echilateră?

4. Utilizarea cunoştinţelor de teoria mulţimilor şi teoria funcţiilor în predarea problemelor de loc geometric (analitic şi sintetic).

PROFESORI II

1. Să se calculeze primitivele funcţiei $f(x) = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$, unde $f : \left(\dfrac{1}{e}, \infty\right) \to \mathbb{R}$.

2. Să se arate că orice mulţime $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ de numere întregi conţine o submulţime B cu proprietatea că suma elementelor din B este divizibilă cu n.

3. Se dau în spaţiu punctele A, B, C, D astfel încât $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$. Să se arate că $AD \perp BC$.

4. Fie $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se rezolve în $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ ecuaţia $X = AX - XA$.

5. Construcţia corpului numerelor raţionale. Metodica predării noţiunii de număr raţional.

GRADUL II
1993

BUCUREŞTI
PROFESORI I

1. **a)** Tipuri de probleme necesare însuşirii temei "*Derivata unei funcţii într-un punct; funcţii derivabile*".

b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = |f(x)|$ pentru $x \in \mathbb{R}$. Fie a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a) = 0$, $f(b) \neq 0$. Să se arate că:

(i) g este derivabilă în $a \Leftrightarrow f'(a) = 0$;

(ii) g este derivabilă în b.

2. **a)** Criteriul lui Eisenstein.

b) Fie $p > 2$ un număr prim şi $n = p^k$, $k \in \mathbb{N}$.

(i) Să se determine elementele $x \in \mathbb{Z}_n$ pentru care $x^2 = \hat{1}$.

(ii) Să se arate că produsul elementelor inversabile din inelul $\mathbb{Z}_n$ este $-\hat{1}$.

(iii) Să se arate că $\dfrac{(p^2)!}{p!} + p^p$ se divide cu p^{p+2}.

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $\{O\} = AC \cap BD$. Arătaţi că dacă razele cercurilor înscrise în triunghiurile $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CDO$ şi $\triangle DAO$ sunt egale, atunci $ABCD$ este romb.

PROFESORI II

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x + \sqrt{|2 - 1|}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Să se studieze derivabilitatea funcţiei f. Să se alcătuiască tabelul de variaţie şi să se reprezinte grafic funcţia f.

2. Fie $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^{27} \equiv 14 \pmod{17}$. Să se afle restul împărţirii lui a la 17.

3. Să se calculeze partea întreagă a lui $3^{\sqrt{3}}$.

4. Prin punctul P oarecare al laturii AC a triunghiului ABC se duc paralele la medianele AA' şi CC' ale triunghiului ABC, care intersectează laturile BC şi AB în E şi F respectiv. Ară taţi că medianele AA' şi CC' împart segmentul EF în trei părţi egale.

5. Predarea temelor: *Trunchiul de piramidă*, *Trunchiul de con*; *ariile şi volumele lor.*

TIMIŞOARA

1. Problematizare în predarea limitelor $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pentru $l \in \{-\infty, \infty\}$ sau $x_0 \in \{-\infty, \infty\}$.

2. Fie $f : A \to B$ o aplicaţie şi R_f o relaţie binară pe A definită prin $xR_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

a) Arătaţi că R_f este o relaţie de echivalenţă pe A.

b) Dacă $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ este definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0), & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

găsiţi clasa de echivalenţă $C_{(1,0)}$ determinată de relaţia R_f ce conţine elementul $(1,0)$ şi descrieţi geometric clasa de echivalenţă $C_{(a,b)}$ determinată de R_f ce conţine elementul (a,b).

c) Dacă A şi B sunt grupuri şi f este un morfism surjectiv, arătaţi că clasa de echivalenţă C_e determinată de R_f ce conţine elementul neutru e al grupului A este un subgrup normal al lui A şi $\varphi : A|_{C_e} \to B$, $\varphi(C_x) = f(x)$ $(\forall)$ $C_x \in A|_{C_e}$ este un izomorfism de grupuri.

3. Pe parabola $y^2 = 2px$ se consideră trei puncte distincte A, B, C. Tangentele în aceste puncte la parabolă determină triunghiul $\triangle A'B'C'$. Să se arate că:

a) $\sigma[ABC] = 2 \cdot \sigma[A'B'C']$.

b) Focarul F al parabolei aparţine cercului circumscris triunghiului $\triangle A'B'C'$.

PROFESORI II

1. Fie ABC un triunghi şi $A'B'C'$ triunghiul său ortic. Să se arate că

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{R}{r}.$$

2. Reprezentaţi grafic funcţia dată prin $f(x) = \sqrt{x}(x+1)^2$.

3. Învăţarea prin descoperire la lecţiile *Cel mai mare divizor comun* şi *Cel mai mic multiplu comun* a două polinoame.

BRAŞOV
PROFESORI II

1. Fie triunghiul T_1, de laturi $a \geq b \geq c$.

a) Să se deducă formula lungimii medianei $m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

b) Să se găsească relaţia $\mathscr{R}$ între a, b, c astfel ca T_1 să fie asemenea cu T_2, unde T_2 este triunghiul care are laturile de lungimi egale respectiv cu lungimile medianelor triunghiului T_1.

c) Dacă $\mathscr{R}$ este satisfăcută, există triunghiurile T_3, T_4, ..., fiecare având lungimile laturilor egale cu lungimile medianelor triunghiului precedent, asemenea între ele, între două triunghiuri succesive raportul de asemănare fiind $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Să se determine n_0 începând de la care

$$\sigma(T_n) < \frac{\sigma(T_1)}{3},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

2. Se dau funcţiile definite de expresiile

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{1}{1-x},\ f_3(x) = \frac{x-1}{x}.$$

a) Să se reprezinte grafic pe domeniile lor de definiţie maxime (prin orice procedeu).

b) Să se arate că $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ (definite pe intersecţia domeniilor), faţă de operaţia de compunere de funcţii, formează un grup.

c) Să se dea alte două exemple de grupuri cu 3 elemente.

d) Să se arate că toate grupurile cu trei elemente sunt izomorfe între ele.

3. Teorema directă, reciprocă, contrară, contrara reciprocei. Comentarii şi exemplificări din geometria plană.

CLUJ
PROFESORI II

1. Să se definească noţiunea de relaţie de echivalenţă. Să se arate că în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaţia "$\sim$" definită prin

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1$$

este o relaţie de echivalenţă. Pentru ce se realizează această relaţie în aritmetică?

2. Să se enunţe teorema lui Cramer privind sistemele de ecuaţii liniare. Să se discute în funcţie de $m \in \mathbb{R}$ şi în caz de compatibilitate să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 + 5m + 7. \end{cases}$$

3. Metodica predării relaţiilor metrice în triunghiul dreptunghic.

CRAIOVA
PROFESORI II

1. Rolul exemplelor în predare şi învăţare:

a) în definirea conceptelor matematice;

b) în demonstrarea teoremelor.

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

a) Să se demonstreze că f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ iar apoi să se determine $\mathrm{Im}(f)$.

b) Utilizând eventual rezultatul de la punctul a), să se demonstreze că pentru orice z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, avem inegalitatea:

$$\frac{|z_1 + z_2|}{1 + |z_1 + z_2|} \leq \frac{|z_1|}{1 + |z_1|} + \frac{|z_2|}{1 + |z_2|}.$$

c) Daţi o generalizare a inegalităţii de la punctul b).

3. Fie ABC un triunghi oarecare şi M un punct oarecare în planul său. Se notează cu A', B', C' simetricele lui M faţă de laturile BC, CA respectiv AB.

a) Demonstraţi că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

b) Dacă M' este punctul de concurenţă de la a), demonstraţi că dreapta MM' trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC.

c) Folosind eventual rezultatele de la punctele precedente, deduceţi locul geometric al punctelor M', când M descrie cercul circumscris triunghiului ABC.

IAŞI
PROFESORI II

1. Se consideră matricea $M(a) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Să se afle $(M(a))^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

b) Pentru $a = 1$, să se arate că mulţimea puterilor naturale formează un grup multiplicativ.

c) Să se arate că acest grup este izomorf cu grupul $\mathbb{Z}_4$.

2. Fie $ABCD$ un trapez cu baza mare AB şi baza mică CD în care notăm $\{O\} = AC \cap BD$. O paralelă dusă prin O la bază taie laturile neparalele în E şi F $(E \in AD)$. Să se arate că:

a) Punctul O este mijlocul segmentului EF.

b) Diagonalele AC şi BD se taie într-un raport egal cu raportul bazelor.

c) $\dfrac{1}{EO} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{CD}$ şi deduceţi că EF este media armonică a bazelor. Formulaţi o metodă de construcţie a mediei armonice.

3. Metodica predării temei "*Divizibilitatea în mulţimea numerelor întregi*".

GRADUL II
1994

CRAIOVA
PROFESORI I

1. **a)** Să se calculeze: $\displaystyle\int_0^2 \max\left\{x, \sin\frac{\pi x}{2}\right\}\, dx$.

b) Să se arate că: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a|^n + |b|^n} = \max\{|a|, |b|\}$.

c) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = e^{|x^2+ax+b|}$. Să se determine numerele reale a şi b astfel ca funcţia f să admită extreme în punctele de abscise -1, 2, 5.

2. Fie $U_n = \{z_k \in \mathbb{C} \mid z_k^n = 1,\, 1 \le k \le n,\, z_1 = 1\}$.

a) Să se calculeze: $S_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_j^k$ cu $k \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că: $\displaystyle\prod_{j=2}^{n}(1 - z_j) = n$.

c) Fie $G \subset \mathbb{C}^*$ un grup multiplicativ cu n elemente. Să se arate că $G = U_n$.

d) Să se determine toate subgrupurile lui U_n.

3. **a)** Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu lungimea laturii bazei egală cu a şi unghiul diedru dintre o faţă laterală şi planul bazei de măsură α. Prin dreapta AB se duce un plan π care face cu planul bazei un unghi de măsură $\beta < \alpha$. Să se determine forma şi aria secţiunii $ABMN$ realizată de planul π în piramida dată ($M \in SC$, $N \in SD$) şi condiţia ca planul π să determine în piramidă două corpuri de volume egale.

b) Dacă $ABCD$ este un patrulater convex dat, să se determine locul geometric al punctului S din spaţiu astfel încât $SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2 = k$, $k =$ constant.

4. Inducţia matematică. Daţi câte un exemplu din: Inegalităţi, Divizibilitate, Combinatorică.

PROFESORI II

1. Teorema directă, reciprocă, contrară, contrara reciprocei. Exemple:

a) Teoremă cu mai multe reciproce, nu toate adevărate;

b) Teoremă cu reciprocele false.

2. Fie ABC un triunghi oarecare şi AD bisectoare ($D \in BC$). Cercul circumscris triunghiului ABD taie segmentul AC în N, iar cercul circumscris triunghiului ACD taie segmentul AB în M. Să se arate că $BM = CN$.

3. Să se determine mulţimea

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{x^4 + x^2 + x + 3}{x^2 + x + 1} \in \mathbb{N} \right\}$$

4. Fie $\mathscr{M} = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = I_2\}$.

a) Orice matrice din $\mathscr{M}$ este inversabilă.

b) Dacă $A \in \mathscr{M}$ şi $\det(A) = 1$, atunci există $\theta \in [0, 2\pi)$ astfel încât $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

c) Pentru $A \in \mathscr{M}$, cu $\det(A) = 1$, să se calculeze matricea A^n.

TIMIŞOARA
PROFESORI I

1. Fie $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definită prin $f(x) = \int_0^x \left|t^2 - 1\right| dt$. Se cere:

a) să se expliciteze f şi să se determine constanta c din teorema lui Lagrange pentru funcţia f pe $[0, 2]$;

b) punctele de extrem şi punctele de inflexiune ale funcţiei f;

c) să se arate că f este o bijecţie de la $\mathbb{R}_+$ la $\mathbb{R}_+$;

d) să se determine mulţimea de derivabilitate a inversei f^{-1} şi să se arate că pe această mulţime avem: $(f^{-1})'(x) \cdot \left|[f^{-1}(x)]^2 - 1\right| = 1$.

2. Fie $A = \{0, 1, a, b\}$ un inel cu patru elemente. Să se arate că:

a) $f : A \to A$, $f(x) = 1 + x$ este bijectivă;

b) $\sum\limits_{x \in A} f(x) = 1 + a + b$ şi $1 + 1 + 1 + 1 = 0$;

c) dacă A este corp, atunci $1 + 1 = 0$.

3. În exteriorul pătratului $ABCD$ se consideră punctul E astfel încât $m(\sphericalangle AEB) = 90°$.

a) Dacă O este centrul pătratului, atunci EO este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AEB$.

b) Să se arate că $EO \leq AB$.

c) Să se arate că centrul cercului înscris în $\triangle AEB$ se află pe cercul circumscris pătratului $ABCD$.

PROFESORI II

1. Rolul problemelor în predare şi învăţare. Tipuri de probleme şi metode de rezolvare.

2. Fie funcţia $f(x) = \begin{cases} x + m, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x^2 + mx + 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

a) Să se studieze în funcţie de $m \in \mathbb{R}$:

(i) continuitatea şi derivabilitatea lui f;

(ii) primitivabilitatea şi monotonia lui f.

b) Pentru $m = 1$ se cere:

(i) graficul lui f;

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x^2 + 1}\, dx$.

3. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare AB şi fie O punctul de intersecţie a diagonalelor.

a) Să se arate că dacă M este mijlocul lui AD, N mijlocul lui OC şi P mijlocul lui OB, iar $m(\sphericalangle AOB) = 60°$, atunci triunghiul MNP este echilateral.

b) Dacă $m(\sphericalangle AOB) = 60°$, atunci $AC = AB + CD$. Este adevărată reciproca?

4. Să se rezolve ecuaţia $|x - 1| + |x + 1| = 2$, $x \in \mathbb{R}$.

IAŞI
PROFESORI II

1. Să se arate că mulţimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ a matricelor pătratice superior triunghiulare formează un subinel în $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$.

2. Să se arate că orice număr prim este de forma $4n+1$ sau $4n-1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Se consideră funcţia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{dacă } x \in [0,1) \\ x(e^x - e), & \text{dacă } x \in [1,2]. \end{cases}$

a) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea acestei funcţii în punctul $x = 1$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

4. Pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic ABC se consideră un punct D şi se notează cu E şi F proiecţiile lui D pe catetele AB şi AC.

a) Să se demonstreze că suma distanţelor punctelor E şi F la ipotenuza BC este egală cu înălţimea din A a triunghiului ABC.

b) Se notează cu P şi Q simetricele lui D faţă de punctele E şi F. Să se demonstreze că punctele P, A, Q sunt coliniare.

5. Relaţii metrice într-un triunghi dreptunghic. Predarea în gimnaziu.

CLUJ
PROFESORI II

1. Se dau polinoamele $P_1(X) = X^2 + nX - 3 \in \mathbb{R}[X]$, $P_2(X) = X^3 - X^2 - 5X + m \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine m şi n astfel încât P_1 şi P_2 să aibă rădăcini comune.

b) Pentru valorile obţinute să se afle rădăcinile celor două polinoame.

c) Să se determine m astfel încât P_2 să aibă o singură rădăcină reală.

2. Se consideră funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{(1 - x^2)^3}$.

a) Să se reprezinte grafic funcţia.

b) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcţiei şi axa Ox.

3. **a)** Criterii de divizibilitate în $\mathbb{N}$.

b) Să se arate că $\forall\, n \in \mathbb{N}$, numărul $17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n} \,\vdots\, 10$.

BUCUREŞTI
PROFESORI II

1. **a)** Fie a, $b \in \mathbb{Z}$. Să se arate că 7 divide $a^2 + b^2$ dacă şi numai dacă 7 divide a şi 7 divide b.

b) Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care 7 divide $2^{2n} + 2^n + 1$.

2. **a)** Demonstraţi că în orice tetraedru segmentele care unesc respectiv mijloacele a două muchii opuse, au un punct comun G.

b) Fiind dat tetraedrul $ABCD$, arătaţi că oricare ar fi P un punct din spaţiu, are loc egalitatea:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

3. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

4. Inversiuni în planul euclidian; aplicaţii la demonstrarea unor teoreme clasice şi rezolvarea de probleme.

BRAŞOV
PROFESORI II

1. Să se rezolve:

a) $\left\lfloor \dfrac{2x+7}{3-x} \right\rfloor = 3x+1$, unde $\lfloor\ \rfloor$ este funcţia parte întreagă;

b) $\sqrt{2|x| - 2x} = 5m - x$, $m \in \mathbb{R}$.

2. Pe laturile triunghiului ABC se consideră în exterior triunghiurile BCI, CAJ, ABK echilaterale. Să se arate că:

a) Cercurile circumscrise celor trei triunghiuri construite trec printr-un punct M.

b) Dreptele AI, BJ, CK sunt concurente în M.

c) Suma distanţelor de la M la vârfurile triunghiului ABC este minimă.

3. Care dintre afirmaţiile următoare sunt adevărate:

a) $x < y \Longleftrightarrow x^2 < y^2$;

b) $(A \cup B) \subset (B \cup C) \Longleftrightarrow A \subset C$;

c) f, g injective $\Longleftrightarrow f \circ g$ injectivă;

d) f, g surjective $\Longleftrightarrow f \circ g$ surjectivă;

Justificaţi prin exemple.

GRADUL II
1995

CRAIOVA
PROFESORI I

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x(1+e^{-x})$.

a) Să se arate că f este indefinit derivabilă şi că $f^{(n)}(x)=a_ne^{-x}+b_nxe^{-x}$, $(\forall)$ $n\geq 3$, $(\forall)$ $x\in\mathbb{R}$. Deduceţi că $a_{n+1}=b_n-a_n$ şi $b_{n+1}=-b_n$.

b) Arătaţi că $f'(x)>0$, $(\forall)$ $x\in\mathbb{R}$ şi apoi să se reprezinte grafic funcţia.

c) Determinaţi punctele de pe grafic în care tangenta la acesta este paralelă cu asimptota oblică.

d) Să se calculeze: $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\displaystyle\int_0^{\alpha}[f(x)-x]\,dx$.

2. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{pmatrix}$ cu $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze A^n pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze $A+A^2+\ldots+A^n$ scriind-o sub forma cea mai simplă.

c) Fie matricele $C=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ şi $D=\begin{pmatrix}\sin 3\alpha\\ \tan 3\alpha\\ \cos 3\alpha\end{pmatrix}$. Să se afle x, y, $z\in\mathbb{R}$ încât $A\cdot C=D$.

3. Să se determine locul geometric al punctelor din planul euclidian pentru care raportul distanţelor faţă de un punct fix A şi faţă de o dreaptă fixă d este constant $(A\notin d)$.

4. Exemple şi contraexemple în algebră, analiză şi geometrie.

PROFESORI II

1. Exemple şi contraexemple în aritmetică, geometrie şi analiză matematică.

2. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+2mx+1}$ cu $m\in\mathbb{R}$, unde D este domeniul de definiţie al funcţiei f.

a) Să se determine m astfel încât f să admită un extrem în $x=1$.

b) Pentru $m=1$ cercetaţi derivabilitatea funcţiei şi reprezentaţi grafic funcţia f.

c) Determinaţi mulţimea numerelor $p\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $f(x)=p$ are trei rădăcini reale diferite, pentru $m=1$.

d) Calculaţi aria domeniului mărginit de graficul lui f şi tangenta la acest grafic în $O(0,0)$, în cazul $m=1$.

3. a) Fie x, $y\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n(y-x)=x-1$. Să se arate că

$$x^{n+1}-y^n=(x-y)^2(x^{n-1}+2x^{n-2}y+3x^{n-3}y^2+\ldots+ny^{n-1}).$$

b) Demonstraţi că

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n<\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1},\ a\in\mathbb{R}^*,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

4. Fie $ABCD$ un paralelogram cu diagonalele AC şi BD.

a) Să se arate că $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$.

b) Dacă $AC^2\cdot BD^2=AB^4+AD^4$, să se calculeze măsura unghiului obtuz al paralelogramului.

TIMIŞOARA
PROFESORI I

1. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de gradul n, având rădăcinile reale şi diferite, x_i, $i = \overline{1,n}$.

a) Să se arate că dacă $x_i \neq 2$, $i = \overline{1,n}$, atunci $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - x_i} = \frac{P'(2)}{P(2)}$.

b) Să se arate că: $P''(x) \cdot P(x) < [P'(x)]^2$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Studiaţi natura integralei improprii $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{1}{P(x)}\, dx$, unde $P(x) = x^2 + x$ şi $a \in \mathbb{R}$. Determinaţi valoarea integralei în caz de convergenţă.

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi x, $y \in G$.

a) Să se arate că dacă $xy^3 = y^3x$ şi $xy^{11} = y^{11}x$, atunci $xy = yx$.

b) Să se arate că dacă pentru m, $n \in \mathbb{N}^*$, prime între ele, $xy^m = y^mx$ şi $xy^n = y^nx$, atunci $xy = yx$.

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu latura a şi E mijlocul lui AA'. Pe semidreapta $(DA$, fie $F \notin [AD]$ astfel încât $AF = \frac{a}{2}$. Determinaţi centrul şi raza sferei ce conţine punctele E, F, este tangentă la planele $(BB'C'C)$ şi $(DD'C'C)$ şi are raza minimă.

4. Utilizarea metodei inducţiei matematice în lecţiile de algebră, geometrie şi analiză.

PROFESORI II

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = e^x - 1 - x$.

a) Să se reprezinte graficul lui f.

b) Să se arate că $e^x \geq 1 + x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $\displaystyle\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\, dx \leq \frac{\pi}{4}$.

2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : (-\infty, 2) \to (0, \infty)$ dată prin:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ ax + 2, & \text{dacă } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

să fie bijectivă. Pentru această valoare a lui $a \in \mathbb{R}$ să se găsească inversa funcţiei f.

3. Pe planul pătratului $ABCD$ se construieşte perpendiculara AM astfel încât $AC = MO$, O fiind punctul de intersecţie al diagonalelor pătratului. Se notează cu E şi F mijloacele segmentelor MB şi MD, iar $\{P\} = AM \cap (CEF)$. Se cere:

a) Să se arate că $(AEF) \perp (CEF)$.

b) Măsura unghiului diedru dintre (CEF) şi (ABC) este $30°$.

c) $PA = 2PM$.

4. Învăţarea prin descoperire în predarea funcţiilor elementare.

BRAŞOV
PROFESORI II

1. **a)** Să se reprezinte grafic funcţia dată de $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x(1-x)}$, $x > 1$.

b) Se dă o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de lungime a şi unghiul dintre o faţă laterală şi bază de măsură α. Să se exprime $E(\alpha) = \dfrac{R}{r}$, unde R şi r sunt razele sferelor circumscrisă respectiv înscrisă.

c) Să se determine (folosind eventual punctul a)) valoarea minimă pentru $E(\alpha)$, aproximând cât mai bine (fără tabele) unghiul corespunzător.

2. **a)** Să se discute după valorile parametrului real m şi să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y - 6z = 0 \\ x + y + 3z = 3m \\ mx - 2y + 3z = -3m. \end{cases}$$

b) Să se discute după valorile parametrului real m şi să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2[x] + [y] - 6[z] = 0 \\ [x] + [y] + 3[z] = 3m \\ m[x] - 2[y] + 3[z] = -3m. \end{cases}$$

unde prin $[x]$ se înţelege întregul cel mai apropiat, mai mic sau egal cu x.

3. Să se dea două exemple de probleme cu conţinut practic (geometrie plană şi algebră) motivându-se propunerile.

BUCUREŞTI
PROFESORI II

1. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x^3 + y^3 = x + y$.

2. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel:

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că $x_n < 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

c) Să se calculeze limita acestui şir.

3. O dreaptă d intersectează laturile AB şi AD ale paralelogramului $ABCD$ în punctele E şi F respectiv, iar diagonala AC în G. Arătaţi că

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}.$$

4. Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic.

CLUJ
PROFESORI II

1. Predarea în şcoala generală a sistemelor de ecuaţii liniare.

2. Să se demonstreze că într-un tetraedru $ABCD$ segmentele determinate de mijloacele muchiilor opuse sunt concurente.

3. **a)** Să se definească noţiunea de număr prim. Să se enunţe şi să se demonstreze teorema fundamentală a aritmeticii.

b) Se dau cinci numere impare diferite. Să se demonstreze că există două dintre ele a căror diferenţă se divide cu 8.

IAŞI
PROFESORI II

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-x\ln x-1$.

a) Să se determine $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$.

b) Să se arate că ecuaţia $f(x)=0$ are numai soluţia $x=1$.

2. Se consideră triunghiul echilateral ABC având laturile de lungime a. Fie E, F intersecţiile bisectoarei exterioare a unghiului $\sphericalangle BAC$ cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$ şi M un punct oarecare pe (AB).

a) Arătaţi că:

(i) $\triangle ABE \equiv \triangle ACF$;

(ii) $FC < FE$;

(iii) $MC + ME > AC + AE$.

b) Să se calculeze aria totală şi volumul corpului obţinut prin rotaţia triunghiului $\triangle CAF$ în jurul laturii $[AF]$.

3. Numere naturale prime. Teorema fundamentală a aritmeticii numerelor naturale. Aspecte metodice.

GRADUL II
1996

TIMIŞOARA

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi se cere:

a) Să se arate că mulţimea $\mathscr{G} = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ formează grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

b) Să se arate că grupul $\mathscr{G}$ este izomorf cu grupul multiplicativ al rădăcinilor de ordinul cinci ale unităţii.

2. Se consideră funcţia $f(x) = \dfrac{x}{1 + xe^{|x-1|}}$ şi se cere:

a) Să se reprezinte grafic funcţia f.

b) Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $m + x(me^{|x-1|} - 1) = 0$ în funcţie de parametrul $m \in \mathbb{R}$.

3. Printr-un punct P al unui cerc se construiesc trei coarde $[PA]$, $[PB]$ şi $[PC]$. Pe fiecare coardă ca diametru se construieşte câte un cerc. Să se demonstreze că aceste cercuri care trec toate prin punctul P, se intersectează două câte două în trei puncte coliniare.

4. **a)** Metoda reducerii la absurd.

b) Rezolvaţi problema următoare (comentarii metodice):

Să se arate că $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

GRADUL II
1998

Cluj-Napoca
Profesor I

1. Fie R raza sferei circumscrise unei piramide patrulatere regulate și r raza sferei înscrise în această piramidă. Să se demonstreze că

$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1.$$

2. **a)** Să se rezolve ecuațiile

$$x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 6x - 4 = 0 \text{ și } x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 12x + 8 = 0,$$

știind că admit rădăcini comune.

b) Fie $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ grupuri și $f : G_1 \to G_2$ omomorfism. Arătați că:

(i) $\ker(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\}$ este un subgrup normal în $(G_1, \cdot)$;

(ii) f este injectivă dacă și numai dacă $\ker(f) = \{e_1\}$;

(iii) dacă H_1 este un subgrup al lui G_1, atunci $f(H_1)$ este un subgrup al lui $(G_2, \cdot)$;

(iv) dacă H_2 este un subgrup al lui G_2, atunci $f^{-1}(H_2)$ este un subgrup al lui $(G_1, \cdot)$.

3. **a)** Predarea teoremei lui Rolle. Observații. Interpretare geometrică.

b) Să se cerceteze dacă sunt îndeplinite condițiile de aplicabilitate ale teoremei lui Rolle pentru funcțiile:

(i) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

(ii) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$.

Cluj-Napoca
Profesor II

1. Să se determine mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Fie $m, n \in \mathbb{R}$ și $f_{mn}(x) = \begin{cases} x - m, & \text{dacă } x \leq 0 \\ nx + m, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$. Să se determine m și n pentru care funcția f_{mn} este:

a) surjectivă;
b) injectivă;
c) bijectivă.

3. **a)** Asemănarea triunghiurilor.

b) Dintr-un punct exterior cercului $\mathscr{C}(O, r)$ se duc tangentele MA și MB. Prin A se duce o paralelă cu MB care intersectează cercul a doua oară în C, iar MC intersectează cercul în D. Arătați că $MT = TB$.

GRADUL II
1999

Cluj-Napoca
Profesor I

1. Fie M mulțimea matricelor pătrate de ordinul al doilea de forma $M(a) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) mulțimea M este un grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor;

b) dacă $(\mathbb{R}, +)$ este grupul aditiv al numerelor reale, aplicația $f : \mathbb{R} \to M$, $f(a) = M(a)$, este un omomorfism surjectiv de grupuri, dar nu și injectiv;

c) mulțimea numerelor complexe cu modulul egal cu unitatea este un grup G în raport cu înmulțirea numerelor complexe;

d) aplicația $g : G \to M$, $g(\cos a + i \sin a) = M(a)$ este un izomorfism de grupuri.

2. Fie $\triangle ABC$ oarecare și punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$, astfel încât dreptele AA', BB' și CC' să fie concurente într-un punct P. Să se arate că:

a) $\dfrac{AP}{PA'} = \dfrac{AC'}{C'B} + \dfrac{AB'}{B'C}$;

b) $\dfrac{PA}{PA'} + \dfrac{PB}{PB'} + \dfrac{PC}{PC'} \geq 6$;

c) dacă P este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci $\dfrac{PA'}{AA'} + \dfrac{PB'}{BB'} + \dfrac{PC'}{CC'} = 1$.

3. **a)** Puncte de extrem. Teorema lui Fermat.

b) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x - \cos x$. Să se arate că f are un singur punct de extrem.

GRADUL II
2000

Cluj-Napoca
Profesor I

1. Clasificarea izometriilor planului euclidian.

2. **a)** Relații binare și de echivalență. Mulțime cât. Relații de ordine.

b) Fie $E = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid 1 \leq x \leq 9\}$. Pe $\mathbb{Z}^*$ definim relația

$$x \rho y \iff x \text{ divide pe } y.$$

Este ρ o relație de ordine pe $\mathbb{Z}^*$? Dar restricția lui ρ la E este o relație de ordine?

3. **a)** Funcții care admit primitive. Aspecte metodice.

b) Există funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să admită primitive și $f \circ f = -\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$?

Cluj-Napoca
Profesor II

1. Relații de echivalență. Mulțimi cât. Exemple.

2. Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = |x^2 - 1| + |x - 2| + x$.

3. **a)** Puterea unui punct față de un cerc. Aspecte metodice.

b) Fie $\triangle ABC$ oarecare în care $m(\sphericalangle A) > 90°$. Determinați un punct $X \in (BC)$ astfel încât $AX^2 = BX \cdot CX$.

Craiova
Profesor I

1. a) Corp, subcorp – aspecte metodice.

   b) Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Să se arate că mulțimea K are structură de corp algebric închis în raport cu operațiile obișnuite de adunare și de înmulțire a matricelor, izomorf cu corpul numerelor complexe.

   c) Fie $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ și $\det(A) < 1$. Să se calculeze limitele șirurilor (a_n) și (b_n).

2. a) Proprietățile funcțiilor derivabile (aspecte metodice).

   b) Arătați că polinomul $p_n = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, nu admite rădăcini multiple.

   c) Arătați că $e^x \geq p_n(x)$, oricare ar fi $x \geq 0$ și $n \in \mathbb{N}$.

3. a) Poligoane inscriptibile – aspecte metodice.

   b) Fie $\triangle ABC$ echilateral și O centrul cercului circumscris. Să se arate că suma pătratelor distanțelor de la vârfurile triunghiului la o dreaptă care trece prin O este independentă de poziția dreptei.

Craiova
Profesor II

1. **a)** Algoritmul lui Euclid. Aspecte metodice.

b) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $51x + 33y = 6$.

2. În vârfurile triunghiului ABC se duc tangente la cercul circumscris lui, care formează triunghiul $A'B'C'$. Fie A_1, B_1, C_1 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$. Arătați că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

3. **a)** Teorema celor trei perpendiculare. Aspecte metodice.

b) Să se arate că într-un tetraedru ortogonal, înălțimile sunt concurente.

GRADUL II
2001

BUCUREȘTI

1. **a)** Definiți noțiunile de sistem de vectori liniar independenți, sistem de generatori și bază într-un spațiu vectorial.

b) Să se arate că polinoamele cu coeficienți reali $f_1(X) = (X-a)(X-b)$, $f_2(X) = (X-b)(X-c)$, $f_3(X) = (X-c)(X-a)$ sunt liniar independente peste $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă

$$(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0.$$

c) Fie $p > 0$ un număr prim. Să se arate că toate grupurile cu p elemente sunt izomorfe. Este afirmația de mai sus adevărată dacă p nu este prim? Justificați răspunsul.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pentru care există $\alpha > 1$ astfel încât $|f(x) - f(y) \geq \alpha \cdot |x-y|$, $(\forall)\ x,\ y \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcția f este injectivă, strict monotonă și surjectivă.

3. Se consideră unghiul X_1OX_2 de măsură 2α, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\cdot$ O sferă variabilă în spațiu $\mathscr{S}(C, r)$ este tangentă laturilor unghiului dat în punctele A, respectiv B. Se notează cu H proiecția centrului sferei C pe planul unghiului dat.

a) Să se arate că $OH^2 \sin^2\alpha + CH^2 = r^2$.

b) Să se determine locul geometric al centrelor sferelor care au raza constantă r și care sunt tangente laturilor unghiului dat.

4. Definiția probabilității unui eveniment. Analiza statistică a datelor cantitative.

5. Compunerea funcțiilor. Funcții injective, surjective, bijective, inversabile. Inversa unei funcții bijective (Considerații teoretice și metodice).

Timișoara
Profesor I

1. Fie A o matrice de tip 2×2. Arătați că, dacă există $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, astfel încât $A^n = O_2$, atunci $A^2 = O_2$.

2. **a)** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integrabilă, a, $b \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}.$$

b) **(i)** Arătați că ecuațiile

$$\sin x = \lfloor \sin x \rfloor \text{ și } \cos x = \lfloor \cos x \rfloor$$

sunt echivalente.

(ii) Fie p, $q \in \mathbb{N}$, p, $q \geq 2$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\int_0^1 \lfloor p^n x \rfloor\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 \lfloor q^n x \rfloor\,\mathrm{d}x}$.

3. Fie punctele A, B, C, aparținând elipsei de ecuație $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, astfel încât centrul de greutate al triunghiului ABC să coincidă cu centrul elipsei. Arătați că aria triunghiului ABC este constantă.

4. **a)** Funcții bijective. Funcții inversabile.

b) Teorema lui Ceva (directa, reciproca aplicații).

Cluj-Napoca
Profesor I

1. **a)** Definiți noțiunea de polinom ireductibil.

b) Determinați polinoamele ireductibile peste $\mathbb{C}$.

c) Determinați polinoamele ireductibile peste $\mathbb{R}$.

d) Fie K un corp comutativ și $f \in K[X]$. Să se arate că, dacă $\text{grad}(f) \in \{2, 3\}$, atunci f este ireductibil peste K dacă și numai dacă f nu are rădăcini în K.

e) Să se descompună polinomul $f = X^6 + 1$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$.

2. **a)** Enunțați și demonstrați teorema de caracterizare a integrabilității Riemann cu ajutorul șirurilor de diviziuni.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k e^{\frac{k}{n}}$.

3. **a)** Teorema celor trei perpendiculare. Enunț, demonstrație, reciproce (aspecte metodice).

b) Se dă un cub de muchie a. Să se calculeze distanța dintre o diagonală a cubului și o muchie laterală pe care nu o intersectează.

Cluj-Napoca
Profesor II

1. **a)** Enunțați axiomele lui Peano relativ la mulțimea numerelor naturale.

b) Să se arate că numărul $E_n = 13^{4n+1} - 13$ se divide cu 390, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. **a)** Să se scrie relațiile lui Viète referitoare la legătura dintre coeficienții și rădăcinile unei ecuații de grad n.

b) Să se rezolve ecuația $x^3 + mx^2 - 16x + 48 = 0$, $m \in \mathbb{R}$, știind că suma a două rădăcini este egală cu zero.

3. **a)** Patrulatere inscriptibile: definiție, teoreme de caracterizare.

b) Se consideră $\triangle ABC$, cu unghiurile strict mai mici decât $\dfrac{2\pi}{3}$. Pe laturile sale se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABC_1, ACB_1, BCA_1. Să se arate că:

(i) cercurile circumscrise acestor triunghiuri au un punct comun T;

(ii) dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 sunt concurente în T;

(iii) $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Craiova
Profesor I

1. **a)** Unghi diedru, unghiul a două plane.

b) Care este valoarea de adevăr a afirmației „*Dacă A, B, C, D sunt puncte necoplanare, atunci semiplanul bisector al unghiului diedru determinat de semiplanele $(AB \mid C)$ și $(AB \mid D)$ taie planul (BCD) după bisectoarea unghiului CBD*"? Motivați răspunsul.

c) Enunțați și demonstrați o proprietate a tetraedrului care generalizează teorema bisectoarei.

2. **a)** Morfisme de grupuri.

b) Definiți pe mulțimea $G = (-2, 2)$ o lege de compoziție „$\star$" astfel încât $(G, \star)$ să fie grup izomorf cu grupul multiplicativ $\big((0, +\infty), \cdot\big)$.

3. **a)** Demonstrați că funcțiile continue transformă intervalele în intervale.

b) Reprezentați grafic funcția $I(a) = \displaystyle\int_0^1 x|x-a|\,\mathrm{d}x$, $a \in \mathbb{R}$.

GRADUL II
2002

BUCUREŞTI

1. **a)** Să se arate că $\sqrt[3]{4} \neq a + b\sqrt[3]{2}$, pentru orice a, $b \in \mathbb{Q}$.

b) Să se arate că mulţimea $\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ nu formează inel în raport cu adunarea şi înmulţirea numerelor reale.

c) Să se arate că mulţimea $K = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ împreună cu adunarea şi înmulţirea numerelor reale este corp comutativ.

d) Să se determine inversul elementului $1 - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}$ în corpul K.

2. Se defineşte funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ astfel: $f(x) = \begin{cases} \arctan\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că f este continuă.

b) Să se arate că f este derivabilă şi să se calculeze $f'(x)$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

3. Se consideră familia de cercuri

$$x^2 + y^2 + 2(\lambda - 5)x - \lambda y = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Să se arate că există două puncte fixe prin care trec toate cercurile din familie.

b) Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor din familie.

4. Schema lui Poisson. Descriere şi demonstraţie.

5. Metoda inducţiei matematice. Aplicaţii.

GRADUL II
2003

BUCUREŞTI

1. Fie K un corp comutativ cu proprietatea că
$$x^2+1\neq 0. \tag{1}$$
pentru orice $x\in K$.

Să se arate că:

a) Dacă $x,y\in K$, atunci $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$.

b) Dacă $M=\left\{\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix}\,\middle|\, x,y\in K\right\}$, atunci M este un corp în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor şi există $\alpha\in M$ astfel încât $\alpha^2+1=0$. În plus, K este izomorf cu un subcorp al lui M.

c) Există corpuri infinite cu proprietatea (1)?

2. Fie $a\in\mathbb{R}$. Se defineşte şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ după cum urmează: $x_0=a$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{\sqrt{1+x_n^2}}$, $n\in\mathbb{N}$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. Fie un trapez $ABCD$ ($AB\parallel CD$) cu diagonalele perpendiculare. Dacă laturile AB, BC, CD, DA au lungimile a, b, c, d, să se arate că:

a) $a^2+c^2=b^2+d^2$.

b) Dacă trapezul admite un cerc înscris, atunci una dintre diagonale este axa de simetrie a trapezului.

c) Aria trapezului este pătratul înălţimii sale dacă şi numai dacă trapezul este isoscel.

4. Date statistice (repartiţii de frecvenţă, tipuri de reprezentare grafică a datelor, dispersia de selecţie).

5. Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic (tratare metodică).

GRADUL II
2004

BUCUREŞTI

1. **a)** Să se arate că dacă $f \in \mathbb{Z}[X]$ are trei rădăcini distincte la împărţirea cu 3, atunci pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, avem că 3 divide pe $f(n)$.

b) Fie K un corp comutativ, $K[X]$ considerat K- spaţiu vectorial cu operaţiile uzuale şi
$V_n = \{f \in K[X] \,|\, \text{grad } F \leq n\}$, unde $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că:

(i) Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n \in K[X]$ sunt polinoame nenule astfel încât $\text{grad}\, f_i \neq \text{grad}\, f_j$, pentru orice $i \neq j$, atunci $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sunt liniar independente peste K.

(ii) V_n este subspaţiu vectorial al lui $K[X]$ de dimensiune $n+1$.

(iii) $B = \{1, X-a, \ldots, (X-a)^n\}$ este o bază a lui V_n, unde $a \in K$.

2. **a)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$. Să se arate că:

(i) f este derivabilă şi să se calculeze funcţia derivată $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) f este derivabilă de două ori în 0.

b) Se defineşte funcţia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ prin relaţia $f(x) = \max(x, 1)$.

(i) Să se arate că f este continuă.

(ii) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\, dx$.

3. **a)** Să se demonstreze că un triunghi este echilateral dacă şi numai dacă centrul cercului înscris coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului.

b) Considerăm elipsa $(\mathscr{E})$ de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

şi două drepte perpendiculare variabile d şi d' care trec prin origine. Fie M şi N (respectiv M' şi N') punctele de intersecţie ale dreptei d (respectiv d') cu elipsa $(\mathscr{E})$. Să se arate că expresia $\dfrac{1}{MN^2} + \dfrac{1}{M'N'^2}$ este constantă.

4. Compunerea funcţiilor. Funcţii injective, surjective, bijective. Inversarea funcţiilor. (Tratare metodică)

CONSTANŢA
Profesori I

1. Teoremele lui Rolle şi Lagrange. Tratare metodică.

2. Reprezentarea trigonometrică a numerelor complexe şi aplicaţii. Aspecte metodice.

3. În grupul permutărilor de patru elemente, se consideră permutarea $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze π^{-38}.

b) Să se determine subgrupul generat de π.

4. Fie un triunghi $\triangle ABC$ având ortocentrul, centrul de greutate şi centrul cercului circumscris notate, respectiv cu H, G şi O. Să se arate că:

a) Punctele H, G şi O sunt coliniare.

b) $OH = 3 \cdot OG$.

5. **a)** Să se arate că funcţia $f(x) = |x|$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se determine $\displaystyle\int |x|\ dx$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Calculaţi: $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|e^x\ dx$.

Profesori II

1. Algoritmul lui Euclid pe $\mathbb{Z}$. Aspecte metodice.

2. Triunghiuri dreptunghice şi congruenţa lor. Aspecte metodice.

3. Să se arate că $1 + \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

4. **a)** Enunţaţi şi demonstraţi teorema medianei.

b) Fie $ABCD$ un dreptunghi în plan. Să se determine locul geometric al punctelor M din plan, pentru care $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

5. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Determinaţi domeniul maxim de definiţie D_f al funcţiei.

b) Calculaţi prima derivată a funcţiei f şi stabiliţi semnul ei pe D_f.

c) Are funcţia f puncte de inflexiune?

d) Trasaţi graficul funcţiei f.

TIMIŞOARA
Profesori I

1. **a)** Să se definească noţiunile de continuitate şi de derivabilitate pentru o funcţie reală de o variabilă reală.

b) Pentru funcţia $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 2|x|, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \\ \alpha x^2 - \beta \cos \pi x, & \text{dacă } x \in (1, 2] \end{cases}$$

se cer valorile α şi β din $\mathbb{R}$ pentru care f este continuă şi derivabilă în $x_0 = 1$.

c) Să se motiveze integrabilitatea pe $[-1, 2]$ a funcţiei f determinată la punctul anterior şi să se calculeze $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$.

2. **a)** Definiţia noţiunii de inel.

b) Arătaţi că:

(i) produsul a două matrice de forma $A(a, b, c)$, unde $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, a, b, $c \in \mathbb{R}$, este o matrice de aceeaşi formă;

(ii) determinantul matricei $A(a, b, c)$ este dat de formula

$$\det A(a, b, c) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca);$$

(iii) dacă $a + b + c = 1$, atunci

$$\det A(a, b, c) = \frac{1}{2}\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right];$$

(iv) mulţimea G a matricelor de forma $A(a, b, c)$,a,b, $c \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$,unde $a + b + c = 1$, este grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor. Determinaţi inversa matricei $A(a, b, c)$ în acest grup.

3. Relaţii metrice într-un triunghi. Tratare metodică generală; schiţa de proiect didactic a unei lecţii din această tematică.

Profesori II

1. **a)** Definiţi noţiunea de grup.

b) Se consideră polinomul $Q(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$ şi derivata lui $P(X) = Q'(X)$.

(i) să se justifice că polinomul $P(X)$ are două rădăcini $x_1 \in (1,2)$ şi $x_2 \in (2,3)$;

(ii) să se verifice dacă produsul rădăcinilor polinomului $P(X)$ poate fi calculat cu formula $2!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$;

(iii) indicaţi o generalizare a punctelor anterioare pentru un polinom $Q(X)$ de grad arbitrar $n > 3$.

2. **a)** Să se definească convergenţa unui şir de numere reale.

b) Să se arate că pentru $\alpha \in [0,1]$, şirul definit prin $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, $n \geq 1$, $x_0 = \alpha$, are toţi termenii din intervalul $[0,1]$.

c) Să se studieze convergenţa şirului de la punctul anterior şi, în caz de convergenţă, să se calculeze limita sa.

3. Relaţii metrice într-un triunghi. Tratare metodică generală; schiţa de proiect didactic a unei lecţii din această tematică.

GRADUL II
2005

BUCUREŞTI

1. Fie polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

a) Descompuneţi polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$ şi în $\mathbb{C}[X]$.

b) Arătaţi că f este un polinom ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

c) Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este o rădăcină a lui f, notăm

$$F_\alpha = \{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}.$$

Arăutaţi că F_α este un subcorp al lui $\mathbb{C}$ şi este şi un $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial de dimensiune 4.

d) Determinaţi inversul numărului $x = \alpha^3 + \alpha$ în F_α.

2. Se consideră două numere $a < b$ şi o funcţie derivabilă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) Să se arate că există şi este unică o funcţie $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care este polinomială de grad mai mic sau egal cu 3 şi are proprietatea că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in [a, b] \\ P(x), & \text{dacă } x \notin [a, b] \end{cases}$ este derivabilă.

b) Rămâne adevărată proprietatea de la punctul precedent dacă în enunţ înlocuim expresia *de grad mai mic sau egal cu* 3 cu expresia *de grad mai mic sau egal cu* 2?

3. În planul $\mathcal{P}$ se consideră $\triangle PAB$. Se cere locul geometric al punctelor M din $\mathcal{P}$ pentru care avem

$$\sigma[MPA] = \sigma[MPB].$$

4. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Teorema celor trei perpendiculare şi reciprocele ei (tratare metodică).

CONSTANŢA
Profesori I

1. a) Definiţi noţiunea de grup finit. Exemple.
   b) Definiţi noţiunea de subgrup al unui grup.
   c) Definiţi noţiunea de clasă de echivalenţă a unui element relativ la un subgrup.
   d) Enunţaţi teorema lui Lagrange.
   e) Demonstraţi teorema lui Lagrange.
   f) Daţi un exemplu de aplicaţie a teoremei lui Lagrange.

2. Să se determine mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiilor:

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 1, & \text{pentru } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{pentru } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$

   b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 1, & \text{pentru } x < 1 \\ x^2 + a, & \text{pentru } x \geq 1 \end{cases}.$

3. Fie cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ şi $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ secante în A şi B. O secantă variabilă trecând prin A taie $\mathscr{C}_1$ în M şi $\mathscr{C}_2$ în N. Se cere:

   a) Să se arate că $m(\sphericalangle MBN)$ este constantă.
   b) Fie $P \in \mathscr{C}_1$ şi $Q \in \mathscr{C}_2$ aflate pe o secantă ce trece prin B astfel încât $PQ \parallel MN$. Să se demonstreze că $MNQP$ este paralelogram.
   c) Să se determine poziţia secantei MN astfel încât distanţa MN să fie maximă.

4. Calculaţi sumele de combinări:

   a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.
   b) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$.
   c) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$.

Profesori II

1. **a)** Aspecte metodice privind predarea teoremei lui Pitagora.

b) Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris în cercul de rază r.

2. Fie $E(x) = x^8 - 2x^4 + 1$. Se cere:

a) Să se rezolve ecuaţia $E(x) = 0$.

b) Să se arate că $M = \{x \in \mathbb{C} \mid E(x) = 0\}$ poate fi organizată ca grup multiplicativ.

c) Să se determine toate subgrupurile acestui grup.

3. Să se determine mulţimea:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{x^4 + x^2 + x + 3}{x^2 + x + 1} \in \mathbb{N} \right\}.$$

4. Pe planul pătratului $ABCD$ se construieşte perpendiculara AM astfel încât $AC = MO$, unde O este punctul de intersecţie a diagonalelor. Se notează cu E şi F mijloacele segmentelor $[MB]$ şi $[MD]$. Să se arate că:

a) $(AEF) \perp (CEF)$.

b) Măsura unghiului diedru dintre (CEF) şi (ABC) este $30°$.

IAŞI

1. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ cu proprietatea că a este o rădăcină reală sau complexă a lui f, atunci şi $\dfrac{1}{a}$, $1 - a$ sunt rădăcini pentru f. Determinaţi polinoamele f.

2. Folosind calculul vectorial:

a) Demonstraţi concurenţa înălţimilor unui triunghi.

b) În triunghiul $\triangle ABC$, fie AD înălţimea corespunzătoare laturii BC şi $\vec{h} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Exprimaţi $\vec{h}$ în funcţie de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

3. **a)** Teorema de convergenţă a şirurilor monotone şi mărginite (subiect metodic).

b) Se consideră $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 < b_0$ şi şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \dfrac{pa_{n-1} + qb_{n-1}}{p+q}$, $b_n = \dfrac{qa_{n-1} + pb_{n-1}}{p+q}$, unde $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p > q$. Arătaţi că şirurile sunt monotone şi mărginite şi au aceeaşi limită.

GRADUL II
2006

BUCUREŞTI

1. Fie M o mulţime nevidă, K un corp comutativ şi $\mathscr{F}(M,K) = \{f | f : M \to K\}$. Să se arate că:

a) $\mathscr{F}(M,K)$ este K-spaţiu vectorial în raport cu adunarea şi înmulţirea cu scalari definite astfel: dacă $f, g \in \mathscr{F}(M,K)$ şi $a \in K$, atunci

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x),$$

oricare ar fi $x \in M$.

b) M este mulţime finită dacă şi numai dacă $\mathscr{F}(M,K)$ este K-spaţiu vectorial de dimensiune finită.

2. Să se determine toate funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea că

$$f'(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3. Se consideră un triunghi ascuţitunghic $\triangle ABC$ şi M un punct mobil pe latura $[BC]$. Fie P şi Q proiecţiile lui M pe AB, respectiv AC. Să se determine poziţia lui M pentru care lungimea segmentului $[PQ]$ este minimă.

4. Funcţii; compunerea funcţiilor; funcţie injectivă, funcţie surjectivă, funcţie bijectivă; inversa unei funcţii (tratare metodică).

CONSTANŢA
Profesori I

1. **a)** Se consideră polinomul $f = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Arătaţi că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

b) Fie $g = a + bX + cX^2$ un polinom cu coeficienţi raţionali. Demonstraţi că dacă $g(\sqrt[3]{2}) = 0$, atunci $g = 0$.

c) Demonstraţi că numărul $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ este iraţional.

d) Determinaţi un polinom nenul cu coeficienţi raţionali care are ca rădăcină pe x.

2. **a)** Calculaţi: $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

b) Demonstraţi inegalităţile:

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\sqrt{n^2+n}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}},$$

pentru orice număr natural $n \ge 1$.

c) Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\sqrt{n^2+k}}.$$

3. **a)** Se consideră triunghiul $\triangle ABC$ de afixe z_A, z_B, z_C. Care este afixul centrului de greutate al triunghiului $\triangle ABC$?

b) Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$ şi se notează cu G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale triunghiurilor $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ şi respectiv $\triangle ABC$. Să se arate că patrulaterul $G_AG_BG_CG_D$ este inscriptibil.

4. Proiectaţi lecţia cu tema *Relaţiile lui Viète* având în vedere identificarea clară a obiectivelor şi a conţinuturilor lecţiei şi urmărind planul:

– Teorema lui Viète pentru relaţiile între rădăcinile şi coeficienţii unui polinom cu coeficienţi în $\mathbb{C}$.
– Cazuri particulare uzuale: relaţiile lui Viète pentru polinoamele de grad 2, 3, 4.
– Prezentaţi trei probleme reprezentative pentru tema propusă.

Profesori II

1. Să se arate că:

a) $\sqrt[3]{6}$ este iraţional.

b) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$.

c) $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ este număr iraţional.

2. Fie p un număr prim şi a, b, c trei numere întregi, nu toate nule. Demonstraţi că:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ pc & a & b \\ pb & pc & a \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. Se consideră cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$, $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ tangente exterioare în punctul A. Se consideră două drepte oarecare d_1, d_2 prin A care intersectează cercul $\mathscr{C}_1$ în B_1, B_2 şi cercul $\mathscr{C}_2$ în C_1, C_2.

a) Să se arate că patrulaterul cu vârfurile B_1, B_2, C_1, C_2.

b) Care este condiţia necesară şi suficientă ca patrulaterul $B_1B_2C_1C_2$ să fie paralelogram?

4. Trataţi metodic tema *Teorema celor trei perpendiculare* urmărind:

– Dreaptă perpendiculară pe un plan.
– Enunţul teoremei celor trei perpendiculare.
– Demonstraţia teoremei.
– O aplicaţie la alegere.

BACĂU

1. *Hiperbola* sau *Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic.*

2. *Teorema lui Lagrange* (enunţ, demonstraţie, interpretare geometrică, un exemplu de problemă care se rezolvă cu ajutorul teoremei lui Lagrange).

3. **a)** Fie şirul definit prin $I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}x^n\, dx$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

(i) Calculaţi I_0 şi I_1.

(ii) Arătaţi că $I_n = -\dfrac{1}{e} + nI_{n-1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie mulţimile $S = \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ şi $T = \{M(x) = A + x \cdot B \mid x \in S\}$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Calculaţi A^2, $A \cdot B$, $B \cdot A$, B^2.

(ii) Să se arate că $U \cdot V \in T$ şi $U \cdot A = A \cdot U = U$, dacă U şi V sunt din T.

(iii) Determinaţi elementele simetrizabile din structura $(T, \cdot)$.

(iv) Să se arate că structurile $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ şi $(T, \cdot)$ sunt izomorfe.

IAŞI
PROFESORI I

1. **a)** Definiţi sumele Riemann şi integrala Riemann.

b) Să se demonstreze că

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

c) Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

2. Prin punctul P situat în interiorul cercului $\mathscr{C}$ de centru O se duc două coarde (AB) şi (CD) perpendiculare între ele. Să se arate că: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$.

3. Algoritmul lui Euclid pentru aflarea c.m.m.d.c. a două numere întregi (tratare metodică). Exemplificaţi prin: Să se simplifice fracţia $\dfrac{9991}{10403}$.

PROFESORI II

1. Fie a, b, c trei numere reale diferite. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - ay + a^2 z = a^3 \\ x - by + b^2 z = b^3 \\ x - cy + c^2 z = c^3 \end{cases}.$$

2. **a)** Definiţi c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. a două numere întregi.

b) Pentru un număr întreg n se notează cu $n\mathbb{Z}$ mulţimea tuturor multiplilor lui n. Să se arate că:

(i) $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă m divide pe n.

(ii) $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$; $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

3. Locuri geometrice (tratare metodică). Exemplificaţi prin:

Să se arate că mediatoarele unui triunghi sunt congruente.

GRADUL II
2007

BUCUREŞTI

1. Fie A un inel cu unitate. Notăm cu $Z(A) = \{a \in A \,|\, (\forall)\, x \in A, ax = xa\}$. Să se arate că:

a) $Z(A)$ este un subinel comutativ al lui A (numit centrul inelului A).

b) Dacă B este un alt inel cu unitate izomorf cu A, atunci $Z(A)$ şi $Z(B)$ sunt izomorfe.

c) Fie K un corp comutativ şi $A = \mathcal{M}_n(K)$ inelul matricelor pătratice cu elemente din K. Să se arate că
$$Z(A) = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} \middle|\, d \in K \right\}.$$

2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin $x_n = \dfrac{1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2}{n^3}$.

a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

b) Mai general, fie $\alpha > -1$. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin $x_n = \dfrac{1^\alpha + 3^\alpha + \ldots + (2n-1)^\alpha}{n^{\alpha+1}}$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. Fie $\mathscr{C}_1$ cercul cu centrul în $A(1,0)$ şi trecând prin punctul $B(4,4)$, iar cercul $\mathscr{C}_2$ cercul cu centrul în $D(10,12)$ şi trecând prin punctul $E(6,15)$.

a) Să se determine poziţia relativă a celor două cercuri.

b) Să se determine punctele de intersecţie ale cercului $\mathscr{C}_1$ cu axa Ox şi cu axa Oy.

c) Dacă M este un punct mobil pe cercul $\mathscr{C}_1$, iar N este un punct mobil pe cercul $\mathscr{C}_2$, să se găsească maximul şi minimul distanţei între M şi N.

4. Metoda inducţiei matematice (tratare metodică).

TIMIŞOARA

1. **a)** Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţia:

$$x\sqrt{y}(x-3)+y(x^2-3x+3)=y-2\sqrt{y}.$$

b) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se defineşte operaţia algebrică $\oplus$ dată prin:

$$x \oplus y = x + y - a,$$

unde $a \in \mathbb{R}$ este fixat.

(i) Arătaţi că $(\mathbb{R}, \oplus)$ este grup abelian.

(ii) Demonstraţi prin inducţie după n, relaţia:

$$x_1 \oplus x_2 \ominus \ldots \oplus x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - (n-1)a,$$

unde $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

(iii) Calculaţi:

$$C_n^1 \oplus C_n^2 \oplus \ldots \oplus C_n^{n-1}.$$

2. Se consideră funcţia $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\, dt$. Demonstraţi că:

a) f este bijectivă, monotonă şi convexă.

b) Există $a, b \in (0, +\infty)$ unic determinate, cu proprietăţile: $f(a) = 1$, $f(b) = 2$ şi $3 < a + 1 < b$.

c) f^{-1} este derivabilă în $x_0 = 1$; calculaţi $(f^{-1})'(1)$.

d) f^{-1} este integrabilă pe $[1, 2]$; calculaţi $\displaystyle\int_1^2 f^{-1}(y)\, dy$.

e) Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \arctan a_n$, $(\forall)\, n \geq 0$, este convergent către a.

f) Pentru orice $\lambda \in (0, +\infty)$ şi orice $\mu \in (0, +\infty)$ există $m \in (0, +\infty)$ astfel încât şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = \mu$, $x_{n+1} = m + \arctan x_n$, $(\forall)\, n \geq 0$ este convergent şi are limita λ.

3. Concurenţa mediatoarelor şi a înălţimilor unui triunghi. Prezentare metodico-didactică (proiectare, predare-învăţare şi evaluare).

CONSTANŢA

1. Fie polinoamele $f = X^3 + 4X^2 + mX + 15$, $g = X^3 - X^2 + 3X - 10 \in \mathbb{R}[X]$, iar x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui f în $\mathbb{C}$.

a) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

b) Pentru $m = 8$, rezolvaţi ecuaţia algebrică $f(x) = 0$.

c) Găsiţi $m \in \mathbb{R}$ astfel ca f şi g să aibă rădăcini comune ce trebuie precizate.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|e^x$.

a) Determinaţi asimptotele la graficul funcţiei f.

b) Aflaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

c) Calculaţi $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

3. Fie $ABCD$ un tetraedru în care $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$. Demonstraţi că:

a) $AD \perp BC$.

b) Înălţimile tetraedrului sunt concurente.

c) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

4. **a)** Aspecte metodice în predarea noţiunii de grup la clasa a XII - a.

b) Arătaţi că mulţimea $U_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\}$, împreună cu înmulţirea, formează grup. Ce puteţi spune despre acest grup?

BAIA MARE

1. Fie $a > 0$. Să se determine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$2f(x) + f(-x) = \begin{cases} -x + 5, & \text{dacă } x \leq a \\ x^2 + 3x - 2, & \text{dacă } x > a \end{cases}.$$

Studiaţi injectivitatea, surjectivitatea şi bijectivitatea funcţiei f.

2. În triunghiul isoscel $\triangle ABC$ cu $BC = 6$, $AB = AC = 5$ se notează cu D piciorul înălţimii din A şi cu A' punctul în care AD intersectează cercul circumscris triunghiului $\triangle ABC$. Paralela la BC prin centrul cercului înscris în triunghiul $\triangle ABC$ intersectează AB în P şi AC în Q. Se cere:

a) Raza R a cercului circumscris triunghiului $\triangle ABC$.

b) Raza r a cercului înscris în triunghiul $\triangle ABC$.

c) Volumul corpului obţinut prin rotirea triunghiului $\triangle ABD$ în jurul lui AD.

3. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

a) **(i)** Să se calculeze $f'(x)$ şi să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(ii) Să se arate că funcţia f' este strict descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

b) **(i)** Calculaţi:

$$I(a) = \int_1^5 \frac{1}{|x - a| + 1}\, dx,\ a \in \mathbb{R}.$$

(ii) Arătaţi că există limita $\lim\limits_{a \to 5} I(a)$ şi calculaţi această limită.

4. Proprietăţi ale funcţiilor derivabile: teoremele Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy. Abordare ştiinţifică şi metodică.

IAŞI
PROFESORI I

Varianta 1

1. Fie A o matrice pătratică reală, de ordinul n, fixată şi $\mathscr{M}(A)$ mulţimea matricelor pătratice, de ordinul n, permutabile cu matricea A la înmulţire.

a) Arătaţi că $\mathscr{M}(A)$ este un subinel al inelului matricelor pătratice de ordinul n şi un subspaţiu liniar al spaţiului matricelor pătratice de ordinul n.

b) Pentru $n = 2$ şi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, determinaţi $\mathscr{M}(A)$. Ce dimensiune are spaţiul liniar $\mathscr{M}(A)$ în acest caz şi precizaţi o bază a acestui spaţiu.

2. **a)** Să se schiţeze graficul funcţiei $f(x) = \sqrt{2x+1} - 1$.

b) Să se arate că funcţia f verifică relaţia $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+f(t)}\,dt$, $(\forall)\ x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

c) Să se determine toate funcţiile continue $f : \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \to (-1, \infty)$ care verifică relaţia $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+f(t)}\,dt$.

3. Linii importante într-un triunghi şi concurenţa lor. Tratare metodică şi ştiinţifică.

Varianta 2

1. Se consideră o dreaptă d, un punct M al acestei drepte şi un cerc $\mathscr{C}$ tangent la dreapta d în punctul M. Pe dreapta d se consideră două puncte A şi A'. Cercul taie mediatoarea segmentului AA' în punctele N_1 şi N_2. Dreptele AN_1 şi $A'N_2$ se întâlnesc într-un punct P. Să se găsească locul geometric al punctului P când cercul $\mathscr{C}$ variază rămânând tangent în M la dreapta d.

2. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definim şirul $(a_n)_{n\geq 2}$ prin $a_n = \dfrac{e^{\arcsin \frac{1}{n}} - 1}{e^{\frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n}}$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. Inel, subinel, morfisme de inele; aspecte metodico-ştiinţifice.

Varianta 3

1. Se consideră mulţimea $\mathscr{M}$ a matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ cu $a,\, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0$.

a) Să se arate că operaţia de înmulţire a matricelor determină pe $\mathscr{M}$ o structură de grup.

b) Arătaţi că aplicaţia $f : \mathbb{C}^* \to M,\ f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ este un izomorfism al grupului multiplicativ al numerelor complexe nenule cu grupul $\mathscr{M}$.

c) Calculaţi $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{60}$.

2. Fie $\alpha > 0$; definim recurent şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin:

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{x_n + 1}.$$

a) Să se arate că (x_n) este monoton şi mărginit, oricare ar fi $\alpha > 0$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) Să se determine valorile parametrului α pentru care seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ converge.

3. Relaţii metrice în triunghi. Aspecte metodico-ştiinţifice.

Varianta 4

1. **a)** Să se arate că, oricare ar fi $x \geq 1$,

$$\ln x < x + 1 - \frac{2}{x}.$$

b) Dacă $m > n > 0$, să se arate că

$$mn \ln mn < m^2 + mn - 2n^2.$$

2. Fie $\mathscr{M}$ mulţimea matricelor de forma $M(a) = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Arătaţi că, în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor, mulţimea $\mathscr{M}$ formează un grup comutativ izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.

3. Vectori în plan şi în spaţiu; aspecte metodice şi ştiinţifice.

Varianta 5

1. Fie G mulţimea matricelor din $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de forma $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, având proprietatea că $\det M = -1$. Să se arate că G este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

2. Se consideră o dreaptă d, un punct M al acestei drepte şi un cerc $\mathscr{C}$ tangent la dreapta d în punctul M. Pe dreapta d se consideră două puncte A şi A'. Cercul taie mediatoarea segmentului AA' în punctele N_1 şi N_2. Dreptele AN_1 şi $A'N_2$ se întâlnesc într-un punct P. Să se găsească locul geometric al punctului P când cercul $\mathscr{C}$ variază rămânând tangent în M la dreapta d.

3. Teorema lui Lagrange. Aspecte metodico-ştiinţifice.

PROFESORI II

Varianta 1

1. Să se arate că $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$, pentru orice număr natural $n \geq 1$.

2. În triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ bisectoarea interioară a unghiului B intersectează AC în B', iar perpendiculara în B' pe BB' intersectează dreapta BC în D. Să se demonstreze că $BD = 2 \cdot B'C$.

3. Operaţii cu mulţimi; aspecte metodico-ştiinţifice.

Varianta 2

1. Se dă polinomul cu coeficienţi reali $P(X) = X^4 + aX^3 + bX + c$.

a) Să se arate că nu există valori ale coeficienţilor a, b, c astfel ca $P(X)$ să se dividă cu $Q(X) == X^3 - X$.

b) Pentru $a = 1$ determinaţi valorile coeficienţilor b şi c pentru care $P(X)$ admite o rădăcină triplă.

c) Pentru $b = a$ şi $c = 1$ rezolvaţi ecuaţia $P(x) = 0$.
Discutaţi numărul rădăcinilor reale după parametrul a.

2. Să se determine valorile reale ale lui x astfel încât $\frac{1}{3} \leq \frac{3^x + 1}{9^x + 1} \leq \frac{1}{2}$.

3. Asemănarea triunghiurilor. Aspecte metodico-ştiinţifice.

Varianta 3

1. Să se demonstreze că dacă $|x| \le 1$, atunci inegalitatea $(1-x)^n + (1+x)^n \le 2^n$ este satisfăcută pentru orice număr natural $n \ge 1$.

2. În triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ bisectoarea interioară a unghiului B intersectează AC în B', iar perpendiculara în B' pe BB' intersectează dreapta BC în D. Să se demonstreze că $BD = 2 \cdot B'C$.

3. Divizibilitatea în mulţimea numerelor naturale. Aspecte metodico-ştiinţifice.

Varianta 4

1. Să se arate că numerele următoare:

$$\frac{1}{1-x};\ \frac{m}{x(1-x)};\ \frac{2m-x}{x(1-x)},$$

cu $x \neq 0$, $x \neq 1$ şi $m \in \mathbb{R}$, sunt în progresie aritmetică şi să se determine x pentru care raţia este 3 şi $m = -7$.

2. Să se demonstreze că dacă $|x| \leq 1$, atunci inegalitatea $(1-x)^n + (1+x)^n \leq 2^n$ este satisfăcută pentru orice număr natural $n \geq 1$.

3. Asemănarea triunghiurilor. Tratare metodică şi ştiinţifică.

Varianta 5

1. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n > 1$ avem $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

2. În triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ bisectoarea interioară a unghiului B intersectează AC în B', iar perpendiculara în B' pe BB' intersectează dreapta BC în D. Să se demonstreze că $BD = 2 \cdot B'C$.

3. C.m.m.d.c.; aspecte metodico-ştiinţifice.

GRADUL II
2008

BUCUREŞTI

1. Fie $a \in \mathbb{N}$ şi $G_a = (a, \infty)$. Pentru $x, y \in G_a$ definim $x \star y = xy - a(x+y) + a^2 + a$. Să se arate că:

a) $(G_a, \star)$ este grup abelian.

b) $(G_a, \star)$ este izomorf cu $((0, \infty), \cdot)$.

c) Dacă H este un subgrup al lui G_a care conţine orice număr natural $n > a$, atunci conţine orice număr raţional $q > a$.

2. Fie o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \arccos(2 \sin x)$. Se cere:

a) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{4\pi} f(x)\, dx$.

c) Să se traseze graficul funcţiei.

3. Determinaţi locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanţelor la două drepte date este constantă.

4. Inducţia matematică. Aplicaţii (exemple din algebră, analiză, geometrie).

CONSTANŢA

1. Fie polinoamele $f = X^3 + 4X^2 + mX + 15$, $g = X^3 - X^2 + 3X - 10 \in \mathbb{R}[X]$, iar x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui f în $\mathbb{C}$.

a) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

b) Pentru $m = 8$, rezolvaţi ecuaţia algebrică $f(x) = 0$.

c) Găsiţi $m \in \mathbb{R}$ astfel ca f şi g să aibă rădăcini comune ce trebuie precizate.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|e^x$.

a) Determinaţi asimptotele la graficul funcţiei f.

b) Aflaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

c) Calculaţi $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

3. Fie $ABCD$ un tetraedru în care $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$. Demonstraţi că:

a) $AD \perp BC$.

b) Înălţimile tetraedrului sunt concurente.

c) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

4. **a)** Aspecte metodice în predarea noţiunii de grup la clasa a XII - a.

b) Arătaţi că mulţimea $U_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\}$, împreună cu înmulţirea, formează grup. Ce puteţi spune despre acest grup?

IAŞI
PROFESORI I

1. Se consideră mulţimea $\mathscr{L}$ a matricelor de forma $A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

a) Să se arate că $\mathscr{L}$ înzestrată cu operaţia de înmulţire a matricelor este grup comutativ.

b) Să se arate că pentru orice $A \in \mathscr{L}$, sistemul algebric liniar $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ are soluţie unică şi să se afle această soluţie.

2. Să se demonstreze că perpendiculara pe tangenta la curba de ecuaţie $3y = 6x - 5x^3$ în punctul $M\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ trece prin originea sistemului de coordonate.

3. Subiect metodic: Dreaptă perpendiculară pe un plan. Să se ilustreze prin rezolvarea problemei:

Se dă tetraedrul $ABCD$ în care $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$. Notăm cu H proiecţia ortogonală a punctului A pe planul (BCD).

a) Arătaţi că H este ortocentrul triunghiului BCD.

b) Arătaţi că $AD \perp BC$.

PROFESORI II

1. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda x^2 - 2x + 4\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

- **a)** Să se afle λ astfel încât punctul de minim x_0 al funcţiei f să fie egal cu 1.
- **b)** Pentru λ determinat mai sus, să se determine punctul $V(x_0, f(x_0))$
- **c)** Să se scrie, în plan, ecuaţia dreptei OV, unde O este originea axelor de coordonate.

2. Notăm cu O intersecţia diagonalelor trapezului $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Paralela prin O la AB taie laturile AD şi BC în E şi F. Fie M şi N mijloacele bazelor AB şi DC.

- **a)** Arătaţi că punctele N, O şi M sunt coliniare.
- **b)** Arătaţi că $EF = \dfrac{2 \cdot AB \cdot DC}{AB + DC}$.
- **c)** În ce caz patrulaterul $EMFN$ este paralelogram?

3. Subiect metodic: Cel mai mare divizor comun a două numere întregi.

Folosind, eventual, algoritmul lui Euclid, să se simplifice fracţia $\dfrac{9165187}{994000891}$.

GRADUL II
2009

BUCUREŞTI
Profesori I

1. **a)** Fie a, b două numere naturale. Să se arate că 7 divide $a^2 + b^2$ dacă şi numai dacă 7 divide a şi 7 divide b.

b) Să se determine numerele naturale n pentru care 7 divide $2^{2n} + 2^n + 1$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin: $f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{dacă } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x - 2, & \text{dacă } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

a) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ astfel ca f să fie bijectivă şi în acest caz să se determine inversa f^{-1}.

b) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ astfel ca f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi în acest caz să se determine intervalele de monotonie ale lui f.

3. Să se demonstreze că un trapez este trapez isoscel dacă şi numai dacă diferenţa lungimilor diagonalelor este egală cu diferenţa lungimilor laturilor neparalele.

4. Raţionamentul prin reducere la absurd.

Se cer: descriere generală; cel puţin două exemple în care se aplică un astfel de raţionament; precizarea unor dificultăţi de înţelegere de către elevi a raţionamentului prin reducere la absurd şi descrierea unor soluţii pentru depăşirea acestora.

Profesori II

1. **a)** Fie a, b două numere naturale. Să se arate că 7 divide $a^2 + b^2$ dacă şi numai dacă 7 divide a şi 7 divide b.

b) Să se determine numerele naturale n pentru care 7 divide $2^{2n} + 2^n + 1$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin: $f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{dacă } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x - 2, & \text{dacă } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

a) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ astfel ca f să fie bijectivă şi în acest caz să se determine inversa f^{-1}.

b) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ astfel ca f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi în acest caz să se determine intervalele de monotonie ale lui f.

3. Să se demonstreze că un trapez este trapez isoscel dacă şi numai dacă diferenţa lungimilor diagonalelor este egală cu diferenţa lungimilor laturilor neparalele.

4. Raţionamentul prin reducere la absurd.

Se cer: descriere generală; cel puţin două exemple în care se aplică un astfel de raţionament; precizarea unor dificultăţi de înţelegere de către elevi a raţionamentului prin reducere la absurd şi descrierea unor soluţii pentru depăşirea acestora.

CLUJ-NAPOCA

1. **a)** Reprezentări analitice ale dreptei în plan.

b) Se consideră reperul cartezian xOy şi P un punct pe prima bisectoare a axelor de coordonate. Fie P_1 şi P_2 proiecţiile ortogonale ale lui P pe axa absciselor, respectiv a ordonatelor. O dreaptă variabilă d care trece prin P intersectează axa absciselor în M şi axa ordonatelor în N. Să se demonstreze că, pentru orice poziţie a dreptei d, dreptele MP_2, NP_1 şi perpendiculara pe d care trece prin O sunt trei drepte concurente.

2. **a)** Limita unei funcţii într-un punct. Criteriul lui Cauchy.

b) Fără a folosi calculul diferenţial arătaţi că:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

c) Fără a folosi calculul diferenţial arătaţi că:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

3. Aveţi de proiectat o lecţie cu tema ”*Progresii aritmetice*”. În cadrul acestei lecţii prezentaţi **numai** următoarele activităţi de învăţare:

a) definirea noţiunii de progresie aritmetică;

b) determinarea termenului general al progresiei aritmetice plecând de la definiţie;

c) demonstrarea prin inducţie matematică a formulei care reprezintă suma primilor n termeni ai progresiei;

d) construirea unei progresii aritmetice infinite formată numai din numere naturale printre care nu se află niciun cub perfect;

e) demonstrarea prin metoda reducerii la absurd a faptului că nu există o progresie aritmetică infinită care să conţină numai numere naturale prime.

IAŞI

1. Fie $p,\, r \in \mathbb{Z}$ şi $q,\, s \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\left|\dfrac{p}{q} - \dfrac{r}{s}\right| < \dfrac{1}{q^s} \Longleftrightarrow \dfrac{p}{q} = \dfrac{r}{s}$.

b) Dacă $\left|\dfrac{p}{q} - \dfrac{r}{s}\right| = \dfrac{1}{q^s}$, fie $\alpha = \min\left\{\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}\right\}$, $\beta = \max\left\{\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}\right\}$. Să se arate că $\dfrac{a}{b} \in [\alpha, \beta]$, $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ dacă şi numai dacă $(\exists)$ $\lambda,\, \mu \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = \lambda p + \mu r$ şi $b = \lambda q + \mu s$.

2. Să se arate că o tangentă oarecare la hiperbolă formează cu asimptotele un triunghi de arie constantă. Să se interpreteze geometric rezultatul.

3. Formula Leibniz-Newton. Tratare ştiinţifică şi metodică.

CONSTANŢA

1. Se consideră polinomul $f = X^4 - 4X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Să se determine numărul rădăcinilor raţionale ale polinomului f.

b) Să se arate că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

c) Fie x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui f. Calculaţi

$$(x_1^{2009} + x_2^{2009} + x_3^{2009} + x_4^{2009}) \left(\frac{1}{x_1^{2010}} + \frac{1}{x_2^{2010}} + \frac{1}{x_3^{2010}} + \frac{1}{x_4^{2010}} \right).$$

2. Se consideră funcţiile f, g, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}$, $g(x) = f(x) - \frac{x^5}{5}$, $h(x) = \arctan x$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^5}$.

b) Demonstraţi că $f(x) > 0 > g(x)$, pentru orice $x > 0$.

c) Demonstraţi că aria suprafeţei mărginite de axa Ox, graficul funcţiei h şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$ este un număr cuprins în intervalul $(0,41; 0,45)$.

3. **a)** Fie triunghiul ABC şi punctul $M \in (AB)$. Demonstraţi că

$$\text{Aria}(AMC) = \text{Aria}(BMC) \text{ dacă şi numai dacă } (AM) \equiv (MB).$$

b) Fie tetraedrul $ABCD$ şi punctul $M \in (AB)$. Demonstraţi că

$$\text{vol}(DAMC) = \text{vol}(DBMC) \text{ dacă şi numai dacă } (AM) \equiv (MB).$$

4. Teorema lui Menelaus şi teorema lui Ceva (tratare metodică). Se vor aborda:

a) Enunţ şi demonstraţie;

b) Reciproce (enunţuri şi demonstraţii);

c) Compuneţi o problemă a cărei rezolvare să se bazeze pe teorema lui Menelaus sau a lui Ceva.

TIMIŞOARA

1. Pentru m, $n \in \mathbb{R}$ se consideră polinomul $P(m,n) = mX + n$ şi mulţimea $I = \{P(m,n) \,|\, m, n \in \mathbb{R}\}$, pe care se definesc operaţia de adunare uzuală a polinoamelor şi legea de compoziţie "$\star$", definită prin

$$P_1 \star P_2 = \text{ restul împărţirii lui } P_1 P_2 \text{ la } X^2 - 1.$$

a) Să se arate că $(I, +, \star)$ este un inel comutativ (unitar) cu divizori ai lui zero.

b) Să se determine elementele inversabile ale acestui inel.

2. Se consideră şirurile (x_n) şi (y_n) definite prin: $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$, $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}$ şi funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2\cos x - 2$. Să se arate că:

a) Şirurile (x_n) şi (y_n) sunt monotone, convergente şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

b) Funcţia f este convexă, strict crescătoare şi pozitivă.

c) Utilizând rezultatele de la a) şi b), are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{x}{\cos x}\, dx \le \lim_{n\to\infty} x_n.$$

3. Să se trateze din punct de vedere metodic subiectul "*Triunghiuri asemenea*".

GRADUL II
2010

BUCUREȘTI

1. **a)** Să se calculeze ordinul lui $\widehat{42}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{100}, +)$.

b) Care sunt ultimele două cifre ale numărului 42^{122}.

c) Care este inversul lui $\hat{7}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{101}, +)$.

d) Care este inversul lui $\hat{7}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{101}^{*}, +)$.

2. Fie $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $a_n = \dfrac{1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3}{n^4}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$, este convergent și calculați limita acestui șir.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)^\alpha}{(x+1)^{\alpha+1} - x^{\alpha+1}}$.

c) Calculați limita șirului $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $b_n = \dfrac{1^\alpha + 3^\alpha + \ldots + (2n-1)^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

Se cer două soluții, din care una să folosească elemente de calcul integral.

3. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct în interiorul triunghiului. Fie A_1, B_1 și C_1 proiecțiile punctului M pe laturile BC, CA și AB.

a) Să se arate că suma $||MA_1|| + ||MB_1|| + ||MC_1||$ este constantă.

b) Să se arate că suma $||BA_1|| + ||CB_1|| + ||AC_1||$ este constantă.

c) Să se determine poziția punctului M pentru care aria triunghiului $A_1B_1C_1$ este maximă.

4. Funcții. Compunerea funcțiilor. Funcții injective, surjective, bijective. Inversa unei funcții bijective.

Se cer: definirea acestor noțiuni, exemple, precizarea unor dificultăți de înțelegere de către elevi a acestor noțiuni și descrierea unor soluții pentru depășirea acestora.

TÂRGOVIȘTE

1. Expuneți idei de promovarea activităților suplimentare în lucrul cu copii dotați.

2. Să se exprime aspecte metodice în rezolvarea următoarei probleme: ”*Să se determine soluția* n *a ecuației algebrice* $A_{n+1}^2 = C_{n-1}^3 + 12$”.

3. Să se rezolve în inelul claselor de resturi modulo 6 ($\mathbb{Z}_6$) sistemul $\begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}y = \hat{3} \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{1} \end{cases}$.

4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x + m}{(e^x + 1)^2}$ cu m parametru real. Să se stabilească intervalele de monotonie. Discuție după m.

SIBIU

1. Metoda modelării matematice.

2. Întocmiți un proiect de lecție la clasa a VII-a cu tema: *Unghiuri în cerc.*

3. Descrieți criteriile pe care le aveți în vedere la alegerea unui manual didactic pentru a-l folosi la clasă.

4. Grupuri. Subgrupuri, subgrupul grupului aditiv $\mathbb{Z}$.

5. Într-un triunghi oarecare ABC considerăm trei ceviene AA', BB', CC' concurente în punctul O. Arătați că:

   a) $\left(\dfrac{OA'}{AA'}\right)^2 + \left(\dfrac{OB'}{BB'}\right)^2 + \left(\dfrac{OC'}{CC'}\right)^2 \geq \dfrac{1}{3}$;

   b) Dacă AA' este înălțime în triunghiul ABC, atunci $m(\widehat{BA'C'}) = m(\widehat{CA'B'})$.

6. Fie funcția $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$. Arătați că:

   a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{f(x)}{\sqrt{f(x-1)}}\, dx \geq 16$;

   b) oricare ar fi a, b, $c \in (1, \infty)$, avem

$$\frac{f(a)}{\sqrt{f(b-1)}} + \frac{f(b)}{\sqrt{f(c-1)}} + \frac{f(c)}{\sqrt{f(a-1)}} \geq 48.$$

CRAIOVA

1. Patrulatere: paralelogram, dreptunghi, romb, pătrat, trapez. Aspecte metodice.

2. Linii importante într-un triunghi și concurența lor. Aspecte metodice.

3. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x - y - 4z = 6 \\ 2x + my - 4z = 14 \\ nx - y + z = 2 \end{cases}$$

cu ajutorul determinanților.

Să se discute soluțiile după m, $n \in \mathbb{R}$.

4. Se consideră funcția $f(x) = \dfrac{m - x}{x^2 - 3x + 2}$, unde m este un parametru real.

   a) Care este numărul extremelor funcției? Discuție după m.

   b) Să se determine m astfel ca $f(-1) = \dfrac{2}{3}$ și apoi să se traseze graficul lui f.

   c) Să se afle intervalele pe care funcția de la punctul b) are valori mai mari ca 1.

IAȘI

1. Cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$, $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$, cu $r_1 = 4$, $r_2 = 12$, sunt tangente exterior și au tangenta comună M_1M_2 cu $M_i \in \mathscr{C}_i$, $i = 1, 2$, $M_1 \neq M_2$. Se cer următoarele:

a) x (lungimea segmentului M_1M_2).

b) y (aria trapezului $O_1M_1M_2O_2$ minus suma ariilor sectoarelor de cerc cuprinse în interiorul trapezului).

2. Fie M mulțimea matricelor de tipul $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, unde a, b, $c \in \mathbb{Z}_5$, $a \cdot b \neq \hat{0}$.

a) Să se determine cardinalul lui M.

b) Să se stabilească dacă M este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

3. Inelul claselor de resturi modulo n. Tratare științifică și metodică.

4. Teorema lui Lagrange (din analiza matematică). Tratare științifică și metodică.

GRADUL II
2011

IAȘI

1. Fie a, $b \in \mathbb{Z}$ și $d = (a, b)$ cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

a) Demonstrați că există u, $v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $d = au + bv$.

b) Demonstrați că

$$(a, b) = 1 \iff \text{inelele } \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b \text{ și } \mathbb{Z}_{ab} \text{ sunt izomorfe.}$$

c) Teorema împărțirii cu rest în $\mathbb{Z}$. Tratare metodică.

2. Se consideră funcția $f_a : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}, & x \in [0, 1] \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f_a să admită primitive.

b) Să se studieze variația și să se traseze graficul funcției f_1.

c) Să se calculeze aria mulțimii plane

$$A = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

3. Reprezentarea trigonometrică a numerelor complexe. Tratare metodică și științifică.

GRADUL II
2012

IAȘI

1. Fie $A,\, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât
$$AB + I_n = k(AB - BA),\ (\forall)\, k \in \mathbb{N}^*,$$
unde I_n este matricea unitate. Să se arate că:

a) $BA = -I_n$.

b) $AB = BA$.

2. Fie $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, unde $\mathbb{C}$ este corpul numerelor complexe.

a) Să se arate că $\overline{z_i} = \dfrac{1}{z_i}$, $i = 1,\, 2,\, 3$.

b) Folosind eventual punctul a), să se arate că $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$.

c) Să se arate că $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

3. În trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ se notează cu M și N mijloacele bazelor, $M \in [AB]$, iar P și Q sunt mijloacele diagonalelor, $P \in [BD]$.

a) Demonstrați că $MNPQ$ este paralelogram.

b) Dacă $MNPQ$ este pătrat, aflați măsurile unghiurilor trapezului $ABCD$.

4. Fie $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ și $b_n = \cos(2\pi\sqrt{n^2+n})$, $n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

5. Fie $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ și fie $g_n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}})(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$.

6. Grupuri (definiții, exemple). Tratare științifică și metodică.

BUCUREȘTI

1. Se consideră polinoamele $p, q \in \mathbb{R}[X]$, $p = X^3 - 2X^2 + 2X + 5$, $q = X^3 - 3X^2 + 2X$.

a) Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului p. Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

b) Este funcția polinomială $f_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asociată lui q injectivă? Dar surjectivă? Justificați.

c) Demonstrați că mulțimea $\mathscr{B} = \{p - q, X - 1, 1\}$ formează o bază a spațiului vectorial al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu 2.

2. Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$.

a) Să se determine domeniul de definiție D și domeniul de derivabilitate al funcției f.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) Să se determine pe D o primitivă a funcției f.

3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, H ortocentrul său și O centrul cercului circumscris triunghiului.

a) Arătați că $\widehat{BAH} \equiv \widehat{CAO}$.

b) Demonstrați că dreapta AO este perpendiculară pe $B'C'$, unde B' și C' sunt picioarele înălțimilor duse din B, respectiv C.

c) Fie $\{M\} = AO \cap B'C'$. Arătați că M este mijlocul lui $B'C'$ dacă și numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.

4. a) Este adevărat că produsul a două numere iraționale este un număr irațional? Justificați.

b) Este adevărat că dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcții astfel încât $f + g$ este strict crescătoare, atunci f și g sunt strict crescătoare? Justificați.

c) Este adevărat că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică dacă și numai dacă $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$, pentru orice $n \geq 2$? Justificați.

d) Ce se poate afirma despre limita unui șir monoton?

e) Este adevărat că punctele în care se caută asimptotele verticale ale graficului unei funcții sunt capete deschise finite ale domeniului de definiție? Justificați.

f) Fie $\mathscr{C}$ mulțimea funcțiilor continue, $\mathscr{D}$ mulțimea funcțiilor care au proprietatea lui Darboux și $\mathscr{P}$ mulțimea funcțiilor care admit primitive. Scrieți o relație de incluziune între aceste trei mulțimi.

g) Este adevărat că un patrulater $ABCD$ este trapez isoscel dacă și numai dacă are diagonalele congruente? Justificați.

h) Ce se poate afirma despre doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ pentru care

$$|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|\,?$$

i) Din $\arctan(\tan x) = a$ rezultă că $x = a$? Justificați.

CLUJ-NAPOCA

1. **a)** Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice numere $k_1, k_2, \ldots, k_n$ reale pozitive are loc relația

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}\right) \geq n^2.$$

b) Aflați numerele $n, k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^*$ care îndeplinesc condițiile

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 5n - 4 \text{ și } \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

a) Arătați că are loc relația

$$(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = f(x), \ (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

b) Arătați că funcția f are asimptotă spre $-\infty$.

3. **a)** Parabola – aspecte metodice.

b) O coardă AB a unei parabole trece prin focar. Arătați că tangentele la parabolă în punctele A și B sunt perpendiculare.

CONSTANȚA
Varianta 1

I. Subiect de specialitate

1. Fie $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul al doilea având elementele în $\mathbb{Z}_2$.

a) Determinați numărul elementelor acestei mulțimi.

b) Arătați că ecuația $X^2 = O_2$ are patru soluții în $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

c) Aflați matricele din $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ care sunt inversabile.

d) Găsiți două matrice $A,\ B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ astfel încât $AB \neq BA$.

e) Arătați că există cel puțin o matrice $C \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ astfel încât $C \neq I_2$ și $C^3 = I_2$.

2. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{ax+1}{x^2+1}$.

a) Arătați că f are două puncte de extrem și anume, un punct de minim și unul de maxim.

b) Fie m minimul lui f și M maximul lui f. Calculați $S = M + m$.

3. O piramidă triunghiulară regulată $SABC$ are latura bazei de lungime a și fețele laterale triunghiuri dreptunghice în S.

a) Să se calculeze volumul piramidei.

b) Fie E și D mijloacele muchiilor SA și BC. Să se calculeze DE și $m(\sphericalangle DEC)$.

II. Subiect de didactica specialității

1. Întocmiți o fișă de lucru pentru lecția cu tema „*Operații cu numere complexe*”.

2. Alegeți o matrice inversabilă și calculați inversa sa prin 3 metode.

3. Demonstrați că într-un triunghi medianele sunt concurente. Dați două soluții, una sintetică și una analitică.

CONSTANȚA
Varianta 2

I. Subiect de specialitate

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^4 = B^3$.

b) Demonstrați că $(AB)^n \neq I_2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Determinați matricea X, având elementele în $\mathbb{R}$, cu proprietatea $AX + XB = I_2$.

2. Se consideră $f : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \ln \dfrac{1}{x} + (1-x) \ln \dfrac{1}{1-x}, & x \in (0,\, 1) \\ 0, & x \in \{0,\, 1\} \end{cases}$.

a) Arătați că funcția f este continuă pe $[0,\, 1]$.

b) Studiați monotonia funcției f.

c) Demonstrați că oricare ar fi $a,\, b \in (0,\, 1)$ și $a + b = 1$, are loc inegalitatea:

$$a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} \leq \ln 2.$$

3. Fie O punctul de intersecție a mediatoarelor unui triunghi ABC și M un punct nesituat în planul (ABC). Să se arate că $OM \perp (ABC)$ dacă și numai dacă $[AM] \equiv [BM] \equiv [CM]$.

II. Subiect de didactica specialității

1. Întocmiți o fișă de lucru pentru lecția cu tema „*Operații cu matrice*”.

2. Alegeți o ecuație irațională și rezolvați-o prin 3 metode.

3. Demonstrați că într-un triunghi înălțimile sunt concurente. Dați două soluții, una sintetică și una analitică.

CONSTANȚA
Varianta 3

I. Subiect de specialitate

1. Fie ecuația $x^3 + x^2 + mx - 1 = 0$.

a) Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, ecuația are o rădăcină ce aparține intervalului $[-1, 1]$.

b) Să se determine m știind că ecuația are o rădăcină dublă.

c) Să se determine m astfel încât $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} < 6$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației.

2. Fie $a \in (0, 1)$ și funcțiile $f, F : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^a}$, $F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

b) Arătați că:

$$\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_2^3 \mathrm{f(t)}\,\mathrm{dt} + \cdots + \int_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{n}} \mathrm{f(t)}\,\mathrm{dt} = \mathrm{F(n)},\ \forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N},\ \mathrm{n} \geq 2.$$

c) Fie $x_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$. Deduceți că $F(n+1) < x_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.

3. Se dă un cub de latură a. Să se afle distanța dintre o diagonală a cubului și o muchie laterală pe care nu o intersectează.

II. Subiect de didactica specialității

1. Întocmiți o fișă de lucru pentru lecția cu tema „*Reguli de calcul cu logaritmi*”.

2. Alegeți o funcție continuă și calculați primitivele sale prin 3 metode.

3. Demonstrați că într-un triunghi mediatoarele sunt concurente. Dați două soluții, una sintetică și una analitică.

GRADUL II, 2013

IAȘI

1. Elaborați un proiect didactic pentru lecția de predare „*Algoritmul lui Euclid*" (pentru numere naturale) prezentând numai:

a) definiția c.m.m.d.c. a două numere naturale;

b) enunțul și demonstrația completă a algoritmului;

c) rezolvați și comentați metodic exercițiul:

Ex. Să se simplifice fracția $\frac{8827}{9191}$.

2. Exemplificați fundamentarea noilor cunoștințe prin rezolvarea următorului exercițiu:

Ex. Se consideră triunghiul ABC în care bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ și mediana laturii $[AC]$ sunt perpendiculare; notăm cu O punctul lor de intersecție. Fie M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ și respectiv $[AB]$. Să se arate că:

a) $[PO]$ este linie mijlocie în triunghiul ABN;

b) punctele M, O și P sunt coliniare;

c) $[MN] \equiv [MO]$.

3. Pentru evaluarea finală a cunoștințelor de analiză matematică pentru clasa a XI-a, elevii primesc următorul subiect:

Ex. Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$.

Elaborați un barem de notare rezolvând complet problema.

CONSTANȚA

Varianta 1

1. Elaborați un proiect didactic pentru lecția de predare „*Construcția inelului claselor de resturi modulo n*” (definiții, exemple, contraexemple; pentru teoremele prezentate în cadrul lecției se vor scrie demonstrațiile complete).

2. Exemplificați fundamentarea noilor cunoștințe prin rezolvarea următoarelor exerciții și probleme:

a) Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax+1}{x^2+1}$.

(i) Arătați că f are două puncte de extrem și anume, un punct de minim și unul de maxim.

(ii) Fie m minimul lui f și M maximul lui f. Calculați $S = M + m$.

b) O piramidă triunghiulară regulată $SABC$ are latura bazei de lungime a și fețele laterale triunghiuri dreptunghice în S.

(i) Să se calculeze volumul piramidei.

(ii) Fie E și D mijloacele muchiilor SA și BC. Să se calculeze DE și $m(\sphericalangle DEC)$.

3. Pentru evaluarea finală a cunoștințelor de clasa a XI-a, elevii primesc următorul subiect:

Fie $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul al doilea având elementele în $\mathbb{Z}_2$.

a) Determinați numărul elementelor acestei mulțimi.

b) Arătați că ecuația $X^2 = O_2$ are patru soluții în $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

c) Aflați matricele din $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ care sunt inversabile.

d) Găsiți două matrice $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ astfel încât $AB \neq BA$.

e) Arătați că există cel puțin o matrice $C \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ astfel încât $C \neq I_2$ și $C^3 = I_2$.

Elaborați un barem de notare rezolvând complet problema.

CONSTANȚA

Varianta 2

1. Elaborați un proiect didactic pentru lecția de predare „*Divizibilitatea numerelor naturale: criterii de divizibilitate cu* 2, 3, 5, 9 *și* 10" (definiții, exemple, contraexemple; pentru teoremele prezentate în cadrul lecției se vor scrie demonstrațiile complete).

2. Exemplificați fundamentarea noilor cunoștințe prin rezolvarea următoarelor exerciții și probleme:

a) Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, se consideră sistemul:

$$\begin{cases} ax + by + cz = b \\ cx + ay + bz = a \\ bx + cy + az = c. \end{cases}$$

(i) Arătați că determinantul sistemului este $\Delta = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

(ii) Rezolvați sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

(iii) Știind că $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$, arătați că sistemul are o infinitate de soluții (x, y, z), astfel încât $x^2 + y^2 = z - 1$.

b) Triunghiul ABC are $m(\hat{A}) = 105°$, $m(\hat{B}) = 45°$ și $AB = 3\sqrt{2}$ cm. Aflați lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului precum și măsura înălțimii AD.

3. Pentru evaluarea finală a cunoștințelor de clasa a XII-a, respectiv clasa a X-a, elevii primesc următoarele subiecte:

a) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin nx|$ și numerele $I_n = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x}\,\mathrm{dx}$.

(i) Calculați $\int_0^{\pi} f_2(x)\,\mathrm{dx}$.

(ii) Arătați că $I_n \le \ln 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(iii) Arătați că $I_n \ge \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Determinați termenul din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{\dfrac{x}{\sqrt[3]{y}}} + \sqrt{\dfrac{y}{\sqrt{x}}}\right)^{17}$ în care x și y au exponenți egali.

Elaborați un barem de notare rezolvând complet cele două probleme.

CONSTANȚA

Varianta 3

a) Elaborați un proiect didactic pentru lecția de predare „*Mulțimea numerelor complexe*” (definiții, exemple, contraexemple; pentru teoremele prezentate în cadrul lecției se vor scrie demonstrațiile complete).

b) Exemplificați fundamentarea noilor cunoștințe prin rezolvarea următoarelor exerciții și probleme:

(i) Se consideră $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \ln \dfrac{1}{x} + (1-x) \ln \dfrac{1}{1-x}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \in \{0, 1\} \end{cases}$.

(A) Arătați că funcția f este continuă pe $[0, 1]$.
(B) Studiați monotonia funcției f.
(C) Demonstrați că oricare ar fi $a, b \in (0, 1)$ și $a + b = 1$, are loc inegalitatea:

$$a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} \leq \ln 2.$$

(ii) Fie O punctul de intersecție a mediatoarelor unui triunghi ABC și M un punct nesituat în planul (ABC). Să se arate că $OM \perp (ABC)$ dacă și numai dacă $[AM] \equiv [BM] \equiv [CM]$.

c) Pentru evaluarea finală a cunoștințelor de clasa a XI-a, elevii primesc următorul subiect:
Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Arătați că $A^4 = B^3$.
(ii) Demonstrați că $(AB)^n \neq I_2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
(iii) Determinați matricea X, având elementele în $\mathbb{R}$, cu proprietatea $AX + XB = I_2$.

Elaborați un barem de notare rezolvând complet problema.

GRADUL II, 2014

Cluj-Napoca

I. **1.** Definiți c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a două numere naturale și precizați cinci proprietăți ale relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$.

2. *Formulați sarcini didactice pentru demonstrarea la clasă, cu elevii, a următoarelor exerciții*:

a) Numerele naturale a și b sunt relativ prime. Arătați că cel mai mare divizor al numerelor $a+b$ și a^2+b^2 este egal cu 1 sau cu 2.

b) Să se arate că numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1111$ se divide cu 11^{110}, dar nu se divide cu 11^{111}.

II. **1.** Definiți distanța de la un punct la o dreaptă și distanța de la un punct la un plan.

2. *Formulați sarcini didactice pentru demonstrarea la clasă, cu elevii, a următoarei probleme*: Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $DC \perp (ABC)$, $AB \perp (BDC)$, $AC = a\sqrt{6}$, $AB = a\sqrt{3}$ și $DC = a$. Să se calculeze:

a) distanța de la punctul B la dreapta AD;

b) distanța BB', unde $BB' \perp (ADC)$, $B' \in (ADC)$.

III. **1.** Enunțați și demonstrați **teorema lui Fermat**.

2. *Formulați sarcini didactice pentru demonstrarea la clasă, cu elevii, a următorului exercițiu*: Funcția $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcție **Rolle**. Să se arate că există un punct $c \in (a,b)$ astfel încât

$$f'(c) = \frac{a+b-2c}{c^2-(a+b)c+ab} f(c).$$

București

I. Se consideră polinomul $p = (X^3 + X + 1)^{1000} + X \in \mathbb{R}[X]$.

1. Demonstrați că p este divizibil cu $X^3 + 1$. Propuneți o altă problemă ce se rezolvă în același mod. Rezolvați problema propusă și explicați în ce constă modificarea făcută.

2. Notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_{3000} \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului p. Calculați $x_1 + x_2 + \cdots + x_{3000}$ și $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{3000}^2$.

3. Descrieți trei posibile dificultăți pe care le-ar putea avea elevii în rezolvarea problemelor propuse la punctele **1** și **2**. Indicați modul în care ați putea interveni, pentru a-i ajuta pe elevi să depășească aceste dificultăți.

II. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

1. Să se studieze derivabilitatea funcției f. Comentați din punct de vedere metodic studiul derivabilității.

2. Să se determine punctele de extrem și imaginea funcției f. Explicați din punct de vedere metodic de ce se poate sau nu se poate aplica **teorema lui Fermat** punctelor de extrem obținute.

3. Să se determine aria domeniului mărginit de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = -2$, $x = 2$. Faceți câteva comentarii din punct de vedere metodic privind modul de determinare al ariei.

III. **1.** Să se arate că în orice triunghi sunt adevărate formulele $S = p \cdot r$ și $S = (p - c) \cdot \rho$, unde r este raza cercului înscris iar ρ este raza cercului exînscris corespunzător unghiului C. Să se deducă relația $\frac{r}{\rho} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$.

2. Fie ABC un triunghi și M un punct situat în interiorul segmentului $[AB]$. Să se arate că $\frac{r}{\rho} = \frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2}$, unde r, r_1, r_2 sunt razele cercurilor înscrise iar ρ, ρ_1, ρ_2 sunt razele cercurile exînscrise (corespunzătoare unghiurilor $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ACM$, respectiv $\sphericalangle MCB$), triunghiurilor ABC, ACM, respectiv CMB.

Descrieți din punct de vedere metodic cum predați sau cum introduceți la clasă o noțiune ce apare la punctele **1** și **2** (de exemplu: ariile figurilor poligonale, funcțiile trigonometrice, cercul, etc).

3. Să se enunțe și să se demonstreze un rezultat ce generalizează problema de la punctul **2**. Dați un alt exemplu ce apare în geometria de liceu sau gimnaziu, prin care se poate arăta trecerea de la particular la general.

Iași, Varianta 1

I. Elaborați un proiect didactic pentru lecția de predare „*Condiții de paralelism și condiții de perpendicularitate a două drepte în plan*” (clasa a X-a). Justificați formulele de caracterizare, iar ca aplicație rezolvați următorul:

Exerciţiu. Fie familia de drepte

$$d_\lambda : \; 2x - y - 6 + \lambda(x - y - 4) = 0, \; \lambda \in \mathbb{R}.$$

(i) Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta d_λ să fie paralelă cu dreapta $d: \; 3x + 2y - 6 = 0$.

(ii) Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta d_λ să fie perpendiculară pe dreapta d.

II. Exemplificați fundamentarea cunoștințelor privind continuitatea și derivabilitatea funcțiilor, reprezentând grafic funcția

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ x^3, & \text{dacă } x \in [-1; 1] \end{cases}.$$

III. Pentru evaluarea finală a cunoștințelor de algebră, elevii primesc următoarele subiecte:

(i) Enunțați și demonstrați **teorema lui Bézout** privind restul îmărțirii unui polinom la $X - a$.

(ii) Să se determine polinomul f de gradul 2 care împărțit la $X - 1$ dă restul 6, împărțit la X dă restul 3 și împărțit la $X + 1$ dă restul 2.

Elaborați un barem de notare rezolvând complet subiectele.

Iași, Varianta 2

I. Elaborați un proiect didactic pentru lecția de predare „*Teorema împărțirii cu rest în mulțimea numerelor naturale*" (clasa a VI-a) prezentând:

– **Teorema împărțirii cu rest** (enunț și demonstrație);
– două exemple;
– rezolvarea și comentarii metodice pentru următorul

Exercițiu. Arătați că:

(i) Orice număr impar este de forma $4k+1$ sau $4k+3$.

(ii) Pătratul oricărui număr impar este de forma $8k+1$.

II. Exemplificați fundamentarea cunoștințelor privind calculul vectorial în plan, rezolvând următorul

Exercițiu. Se consideră sistemul cartezian de axe ortogonale xOy.

(i) Centrul de greutate al triunghiului oarecare ABC din plan este G. Determinați vectorul $\overrightarrow{OG}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OC}$.

(ii) Fie $A(2;-3)$ și $B(-5;1)$. Determinați coordonatele punctelor C și G știind că punctul C se află pe axa Oy, iar centrul de greutate G al triunghiului ABC se află pe axa Ox.

III. Pentru evaluarea finală a cunoștințelor referitoare la studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor (clasa a XI-a), elevii primesc următorul subiect:

Fie funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{|x^3-1|}{x^2}$.

(i) Studiați continuitatea funcției f.

(ii) Studiați derivabilitatea funcției f.

(iii) Reprezentați grafic funcția f.

Elaborați un barem de notare rezolvând complet subiectul.

Iași, Varianta 3

I. Elaborați un proiect didactic pentru lecția recapitulativă „*Teoremele lui Rolle, Lagrange și Cauchy*” (analiză matematică, clasa a XI-a) prezentând:
– enunțurile celor trei teoreme;
– două exemple;
– rezolvarea și comentați din punct de vedere metodic următorul

Exercițiu. Fie f, g, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ trei funcții continue pe intervalul $[a,b]$ și derivabile pe intervalul (a,b). Definim funcția $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ prin:

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}.$$

(i) Să se arate că există $c \in (a,b)$ astfel încât $F'(c) = 0$.

(ii) Să se arate că pentru $h(x) = 1$, $\forall\ x \in [a,b]$ se obține **teorema lui Cauchy**, iar pentru $h(x) = 1$ și $g(x) = x$, $\forall\ x \in [a,b]$ se obține **teorema lui Lagrange**.

II. Exemplificați fundamentarea cunoștințelor de la lecția „*Semnul funcției de gradul* 2” (clasa a IX-a) prin rezolvarea următorului

Exercițiu. Să se determine valorile parametrului real m pentru care

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + (1-3m)x + 2m^2 - 2m \leq 0\} \cap [2;4] \neq \emptyset.$$

III. Pentru evaluarea cunoștințelor de la capitolul „*Calcul vectorial*” (clasa a X-a), elevii primesc următorul subiect:

În sistemul de axe xOy din plan se consideră punctele $A(0;0)$, $B(m,0)$, $C(m-1, 1+2m)$, unde $m > 0$.

(i) Să se determine m astfel încât triunghiul ABC să fie isoscel.

Cluj-Napoca

(ii) Să se determine locul geometric al mijlocului medianei duse din vârful C.

Elaborați un barem de notare rezolvând complet subiectul.

Sibiu

I. Descrieţi *metoda problematizării* și *metoda învățării prin descoperire* și dați cel puțin două exemple de utilizare a uneia dintre acestea: unul din programa de gimnaziu și unul din programa de liceu.

II. Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a.

Competenţe specifice	Conţinuturi
1. **Recunoașterea** funcției de gradul I descrisă în moduri diferite 2. **Identificarea** unor metode grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații 3. **Descrierea** unor proprietăți desprinse din rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații și din reprezentarea grafică a funcției de gradul I 4. **Exprimarea** în limbaj matematic a unor situații concrete ce se pot descrie prin funcții de gradul I, ecuații, inecuații sau sisteme de ecuații 5. **Interpretarea** cu ajutorul proporționalității a condițiilor pentru ca diverse date să fie caracterizate cu ajutorul unei funcții de gradul I 6. **Rezolvarea** cu ajutorul funcției de gradul I a unei situații-problemă și interpretarea rezultatului	**Funcţia de gradul I** • Definiție; reprezentarea grafică a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, unde $a, b\in\mathbb{R}$, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația $f(x)=0$ • Interpretarea grafică a proprietăților algebrice ale funcției: monotonie, semnul funcției • Inecuații de forma $ax+b\leq 0$ $(\geq, <, >)$, $a, b\in\mathbb{R}$, studiate pe $\mathbb{R}$ • Poziția relativă a două drepte; sisteme de tipul $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$, $a, b, c, m, n, p\in\mathbb{R}$

(*Programa școlară de matematică, OMECI nr.* 5099/09.09.2009)

a) Menționați și descrieți două metode de predare-învățare folosite în alcătuirea unui demers didactic elaborat în vederea formării competențelor precizate în secvența de mai sus justificând modul în care aceste metode pot determina formarea competențelor respective.

b) Precizați două mijloace de învățământ folosite și argumentați utilitatea acestora în vederea formării / dezvoltării competențelor specifice precizate în secvența de mai sus.

c) Elaborați un test de evaluare formativă pentru patru dintre competențele specifice prezentate în secvența de mai sus, conținând itemi: *de completare, cu alegere duală, de tip pereche* precizând pentru fiecare item competența / competențele evaluate.

Galați

I. Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VII-a.

Competențe specifice	Conținuturi
1. Recunoașterea și descrierea patrulaterelor în configurații geometrice date **2. Identificarea** patrulaterelor particulare utilizând proprietăți precizate **3. Utilizarea** proprietăților calitative și metrice ale patrulaterelor în rezolvarea unor probleme **4. Exprimarea** prin reprezentări geometrice a noțiunilor legate de patrulatere **5. Alegerea** reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculelor de lungimi de segmente, de măsuri de unghiuri și de arii **6. Interpretarea** informațiilor deduse din reprezentări geometrice în corelație cu anumite situații practice	**Patrulatere** • Patrulater convex (definiție, desen) • Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex • Paralelogram; proprietăți • Paralelograme particulare: dreptunghi, romb și pătrat; proprietăți • Trapez, clasificare; trapez isoscel, proprietăți • Arii (triunghiuri, patrulatere)

Prezentați o activitate didactică elaborată în vederea formării a cel puțin două competențe din secvența de mai sus urmărind:

a) precizarea a două metode didactice și a modului de utilizare a acestora în vederea formării competențelor specifice alese;
b) menționarea a două forme de organizare a activității didactice justificând modul în care acestea pot favoriza formarea/dezvoltarea competențelor specifice alese;
c) precizarea a două mijloace de învăță mânt care pot fi folosite în activitatea didactică respectivă și motivarea utilizării acestora în formarea/dezvoltarea competențelor specifice alese.

II. Elaborați un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme precizând pentru fiecare dintre acestea competențele specifice evaluate din cadrul următoarei secvențe a programei școlare de matematică pentru clasa a X-a.

Competențe specifice	Conținuturi
1. **Exprimarea** relațiilor de tip funcțional în diverse moduri **2.** **Prelucrarea** informațiilor ilustrate prin graficul unei funcții în scopul deducerii unor proprietăți algebrice ale acesteia (monotonie, bijectivitate, semn, continuitate, convexitate) **3.** **Exprimarea** în limbaj matematic a unor situații concrete ce se pot descrie printr-o funcție de o variabilă **4.** **Interpretarea** unor probleme de calcul în vederea optimizării rezultatului **5.** **Utilizarea** echivalenței dintre bijectivitate și inversabilitate în trasarea unor grafice și în rezolvarea unor ecuații	**Funcții și ecuații** • Funcția putere cu exponent natural $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ • Funcția radical $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ și $n = 2$; 3, unde $D = [0, +\infty)$ pentru n par și $D = \mathbb{R}$ pentru n impar. Radical dintr-un număr rațional (de ordinul 2 sau 3), proprietăți ale radicalilor • Funcția exponențială $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$ și funcția logaritmică $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$, creștere exponențială, creștere logaritmică • Rezolvări de ecuații folosind proprietățile funcțiilor: – Ecuații iraționale ce conțin radicali de ordinul 2 sau 3; – Ecuații exponențiale, ecuații logaritmice de forma: $a^{f(a)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $\log_a f(x) = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ și $b \in \mathbb{R}$, utilizarea de substituții care conduc la rezolvarea de ecuații algebrice **Notă.** *Pentru toate tipurile de funcții se vor studia: intersecția cu axele de coordonate, ecuația $f(x) = 0$, reprezentarea grafică a proprietăților algebrice ale funcțiilor: monotonie, bijectivitate, inversabilitate, semn, concavitate/convexitate*

În elaborarea itemului de tip întrebare structurată succesiunea cerințelor va asigura creșterea treptată a gradului de dificultate, iar răspunsul la fiecare cerință nu va depinde de răspunsul la cerința precedentă.

Ploiești

I. Elaborați un proiect didactic pentru lecția de predare „*Algoritmul lui Euclid*” (pentru numere naturale) prezentând numai:

1. definiția c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a două numere naturale;

2. enunțul și demonstrația completă a algoritmului lui Euclid;

3. rezolvați și comentați metodic exercițiul:

Ex. Să se simplifice fracția $\frac{12595401}{1120581}$.

II. Exemplificați fundamentarea noilor cunoștințe prin rezolvarea următorului exercițiu:

Ex. În triunghiul ABC se consideră punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ și $G \in (BC)$ astfel încât $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$, $\frac{FC}{AC} = \frac{1}{3}$.

1. Determinați $\frac{BG}{BC}$ astfel încât punctele E, F și G să fie coliniare.

2. Dacă $H \in (AB)$ astfel încât $GH \perp AB$, atunci $CH = BC$.

3. Dacă $P \in (BC)$ astfel încât $FP \parallel AB$ și T mijlocul lui (AF), atunci punctele H, T și P sunt coliniare.

III. Pentru evaluarea finală a cunoștințelor de analiză matematică pentru clasa a XI-a, elevii primesc următorul subiect:

Ex. Să se reprezinte grafic funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

Elaborați un barem de notare rezolvând complet problema.

Craiova

I. Proiectați o activitate didactică corespunzătoare temei „*Determinanți*” din programa școlară a a clasei a XI-a. În acest sens:

1. Precizați două competențe specifice urmărite, două metode de învățare centrate pe elev care pot fi utilizate în cadrul activității didactice.

2. Detaliați conținuturile corespunzătoare temei conform programei școlare (definiție, proprietăți, metode de calcul).

3. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Calculând în două moduri determinantul matricei A, să se deducă identitatea:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

II. Considerăm problema:

Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{x}^{\mathrm{n}}\,\mathrm{dx}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent și să se calculeze limita șirului.

1. Să se arate că:

a) șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător;

b) șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit;

c) $\dfrac{1}{\mathrm{e}(\mathrm{n}+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;

d) șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

2. Să se enunțe două rezultate matematice utilizate în demonstrarea afirmațiilor de la punctul anterior.

3. Să se realizeze un barem de evaluare și notare pentru problema dată în care să fie menționate principalele unități de răspuns pe care elevul trebuie să le evidențieze; în cadrul baremului realizat, nota 1 se acordă din oficiu, iar nota maximă este 10.

III. La clasa a IX-a, în cadrul unei lecții cu titlul „*Coliniaritate, concurență, paralelism - calcul vectorial în geometria plană*”, este propusă următoarea problemă:

Să se demonstreze că punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

1. Să se prezinte două metode de demonstrarea concurenței medianelor unui triunghi (sintetică și vectorială) oferind demonstrații complete.

2. Să se rezolve problema propusă.

Bacău

I. Prezentați secvențe ale unui proiect didactic pentru o lecție de comunicare și însușire de noi cunoștințe, cu tema „*Cercul - coarde și arce, unghi la centru*" sau cu tema „*Numere complexe sub formă trigonometrică*", având în vedere următoarele aspecte:

1. Formularea a patru competențe specifice care urmează a fi formate/dezvoltate prin activitatea didactică propusă.
2. Prezentarea conținuturilor învățării, precizând cunoștințele anterioare de actualizat.
3. Menționarea a două metode de predare-învățare și exemplificarea modului în care utilizarea lor contribuie la formarea competențelor menționate.
4. Prezentarea a două exemple/contraexemple utile pentru înțelegerea conceptelor studiate.

II. Având în vedere proiectarea unei probe de evaluare, în cadrul temei „*Sisteme de două ecuații cu două necunoscute*" sau al temei „*Progresii aritmetice*", răspundeți următoarelor cerințe:

1. Elaborați patru itemi de evaluare de tipuri diferite: cu alegere multiplă, de tip pereche, de completare și de tip întrebare structurată, precizând pentru fiecare răspunsul așteptat.
2. Propuneți două probleme și prezentați rezolvări complete ale acestora.
3. Elaborați un barem de notare pentru testul alcătuit din cei șase itemi.

Constanța, Varianta 1

I. Elaborați un proiect didactic pentru lecția de predare „*Rezolvarea unor probleme cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații*" (definiții, exemple, contraexemple; pentru teoremele prezentate în cadrul lecției se vor scrie demonstrațiile complete).

II. Exemplificați fundamentarea noilor cunoștințe prin rezolvarea următoarelor exerciții și probleme:

1. Se consideră șirul cu termenul general $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că $I_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, să se stabilească monotonia șirului și să se stabilească monotonia șirului și să se precizeze dacă șirul este convergent.

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{1}{4x^2+2x+1} \leq a$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

2. Fie binomul $(a+b)^n$, unde $a = \sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}$ și $b = \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}$. Să se determine x, știind că termenul dezvoltării care conține pe b^5 este 21, iar coeficienții binomiali ai celui de-al doilea, al treilea și al patrulea termen al dezvoltării binomului sunt în progresie aritmetică.

3. Fie a și b numere reale, astfel încât $a+b = \dfrac{\pi}{3}$. Să se arate că $\sin 2a - \sin 2b - \sin(a-b) = 0$.

III. Pentru evaluarea finală a cunoștințelor de clasa a XI-a, elevii primesc următorul subiect:

Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x - \ \ y - mz = 1 \\ mx + \ \ y + mz = 1 - m \\ mx + 3y + \ 3z = -1 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

1. Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

2. Să se arate că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, matricea sistemului are rangul cel puțin egal cu 2.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

Elaborați un barem de notare rezolvând complet problema.

Constanța, Varianta 2

I. Elaborați un proiect didactic pentru lecția de predare „*Funcția exponențială și funcția logaritmică*" (definiții, exemple, contraexemple; pentru teoremele prezentate în cadrul lecției se vor scrie demonstrațiile complete).

II. Exemplificați fundamentarea noilor cunoștințe prin rezolvarea următoarelor exerciții și probleme:

1. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^2 - 4x + 2$.

a) Arătați că graficele celor două funcții au un punct comun.

b) Determinați ecuațiile tangentelor în punctul comun la cele două grafice.

c) Cercetați dacă există o dreaptă care să fie tangentă ambelor grafice. În caz afirmativ, aflați ecuația acestei tangente.

2. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x > 0$. Să se determine termenul care nu-l conține pe x.

3. Triunghiul ABC are $AB = 2$, $AC = 4$ și $m(\hat{A}) = 60°$. Să se calculeze lungimea medianei duse din A.

III. Pentru evaluarea finală a cunoștințelor de clasa a XII-a, elevii primesc următorul subiect:

Se consideră șirul cu termenul general $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Să se calculeze I_2.

2. Să se demonstreze că $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, $\forall\, n \geq 2$.

3. Să se arate că $I_n \geq 0$, $\forall\, n \geq 2$, să se stabilească monotonia și să se precizeze dacă șirul este convergent.

Elaborați un barem de notare rezolvând complet problema.

Constanța, Varianta 3

I. Elaborați un proiect didactic pentru lecția de predare „*Dreaptă perpendiculară pe un plan. Teorema celor trei perpendiculare și reciprocele ei*" (definiții, exemple, contraexemple; pentru teoremele prezentate în cadrul lecției se vor scrie demonstrațiile complete).

II. Exemplificați fundamentarea noilor cunoștințe prin rezolvarea următoarelor exerciții și probleme:

1. **a)** Determinați ordinele tuturor elementelor din grupul $(\mathbb{Z}_8, +)$.
b) Determinați ordinele tuturor elementelor din grupul $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +)$.
c) Arătați că grupurile $(\mathbb{Z}_8, +)$ și $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +)$ nu sunt izomorfe.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
a) Studiați monotonia funcției f.
b) Comparați numerele $3^{\sqrt{5}}$ și $5^{\sqrt{3}}$.

3. Să se arate că un triunghi ABC este dreptunghic dacă și numai dacă

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2.$$

4. Pentru evaluarea finală a cunoștințelor de clasa a XI-a, elevii primesc următorul subiect:
Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Fie $D = ABC$.
a) Arătați că $AC = CA = I_2$.
b) Calculați B^n, $n \in \mathbb{N}^*$.
c) Calculați D^n, $n \in \mathbb{N}^*$.
Elaborați un barem de notare rezolvând complet problema.

GRADUL II, 2015

Iași

1. Elaborați un proiect didactic pentru lecția de predare „*Paralelogramul*” (clasa a VII-a), având-se în vedere următoarele: definiție, enunț și demonstrație pentru cel puțin două caracterizări ale paralelogramului.

Utilizați noțiunile folosite pentru a demonstra teorema liniei mijlocii într-un triunghi.

2. Exemplificați fundamentarea noilor cunoștințe de la lecția „*Inducția matematică*” prin rezolvarea următorului exercițiu:

Demonstrați că are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1,\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*.$$

3. La clasa a XI-a, pentru evaluarea finală, elevii primesc următoarea problemă:

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

a) Să se studieze monotonia funcției f și să se determine marginea superioară și marginea inferioară pentru mulțimea $\{f(x)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

b) Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel:

$$a_0=a,\ a\in\mathbb{R} \text{ și } a_{n+1}=a_n f(a_n),\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}.$$

Să se studieze convergența șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Elaborați un barem de notare, rezolvând complet problema anterioară.

București

1. Se consideră polinomul $p = X^3 - X + 1$.

a) Studiați ireductibilitatea polinomului p în $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ și $\mathbb{Q}[X]$. Descrieți care credeți că sunt dificultățile ce le-ar putea avea un elev în rezolvarea acestei probleme.

b) Notăm cu a, b și c rădăcinile polinomului $p \in \mathbb{C}[X]$. Să se calculeze $a^2 + b^2 + c^2$ și $a^3 + b^3 + c^3$.

c) Un elev afirmă:
Deoarece $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, rezultă că toate rădăcinile lui p sunt reale.
Explicați în ce constă greșeala din raționamentul acestui elev. Propuneți o modalitate de acțiune (la clasă) pentru corectarea acestei greșeli.

2. a) Fie $x \in (-1, 1)$. Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} nx^n$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,\mathrm{dx}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^n}{x^2+1}\,\mathrm{dx}$. Comentați din punct de vedere metodic rezultatele obținute.

c) Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă. Utilizând eventual metoda integrării prin părți, arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n f(x)\,\mathrm{dx} = \mathrm{f}(1)$.

d) Observând că subpunctul **c)** este o generalizare a subpunctului **b)**, construiți un alt exemplu de analiză matematică pentru a pune în evidență trecerea de la particular la general.

3. a) Să se demonstreze câ în orice triunghi ABC din plan are loc inegalitatea:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Când se realizează cazul de egalitate?

b) Este adevărat următorul rezultat:
Fie ABC un triunghi și P un punct interior triunghiului. Fie A', B' și C' picioarele perpendicularelor din P pe laturile triunghiului. Atunci:

$$PA' + PB' + PC' \leq \frac{1}{2}(PA + PB + PC).$$

Folosind (eventual) rezultatul de mai sus, să se rezolve următoarea problemă:
Fie ABC un triunghi și P un punct interior triunghiului. Să se arate că cel puțin unul dintre unghiurile $\sphericalangle PAB$, $\sphericalangle PBC$ și $\sphericalangle PCA$ are măsura mai mică sau egală cu $30°$.

c) Se consideră următorul enunț: *În orice triunghi, medianele sunt concurente*. Să se demonstreze în cel puțin două moduri acest enunț (de exemplu, sintetic, analitic, vectorial, etc.). Să se explice din punct de vedere metodic care este diferența dintre tehnicile folosite. Care dintre tehnicile folosite vă este mai comodă în predare? Care credeți că este mai potrivită, mai utilă sau mai pe placul elevilor?

Sibiu

1. Metodele problematizării și învățării prin descoperire în predarea matematicii. Dați un exemplu de aplicare a acestora în învățământul gimnazial sau liceal.
2. Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VII-a, Geometrie (*conform planurilor-cadru aprobate prin OMECI nr.* 3410, 3411 *din* 16.03.2009).

Competențe specifice	Conținuturi
1. **Recunoașterea și descrierea** patrulaterelor în configurații geometrice date 2. **Identificarea** patrulaterelor particulare utilizând proprietăți precizate 3. **Utilizarea** proprietăților calitative și metrice ale patrulaterelor în rezolvarea unor probleme 4. **Exprimarea** prin reprezentări geometrice a noțiunilor legate de patrulatere 5. **Alegerea** reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculelor de lungimi de segmente, de măsuri de unghiuri și de arii 6. **Interpretarea** informațiilor deduse din reprezentări geometrice în corelație cu anumite situații practice	**Patrulatere** • Patrulater convex (definiție, desen) • Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex • Paralelogram; proprietăți • Paralelograme particulare: dreptunghi, romb și pătrat; proprietăți • Trapez, clasificare; trapez isoscel, proprietăți • Arii (triunghiuri, patrulatere)

a) Menționați și descrieți două metode de predare-învățare folosite în alcătuirea unui demers didactic elaborat în vederea formării competențelor precizate în secvența de mai sus justificând modul în care aceste metode pot determina formarea competențelor respective.

b) Precizați două mijloace moderne de învățământ folosite în predare-învățare-evaluare și argumentați utilitatea acestora în vederea formării / dezvoltării competențelor specifice precizate în secvența de mai sus.

c) Elaborați un test de evaluare cumulativă (sumativă) conținând, respectiv, itemi: *de completare*, *cu alegere multiplă* (cu un singur răspuns corect), *de tip pereche* pentru trei dintre competențele specifice prezentate în secvența de mai sus, precizând pentru fiecare item competența/competențele evaluate.

Galați

Subiectul I

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a:

Competențe specifice	Conținuturi
1. **Recunoașterea** funcției de gradul I descrisă în moduri diferite 2. **Identificarea** unor metode grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații 3. **Descrierea** unor proprietăți desprinse din rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații și din reprezentarea grafică a funcției de gradul I 4. **Exprimarea** în limbaj matematic a unor situații concrete ce se pot descrie prin funcții de gradul I, ecuații, inecuații sau sisteme de ecuații 5. **Interpretarea** cu ajutorul proporționalității a condițiilor pentru diverse date să fie caracterizate cu ajutorul unei funcții de gradul I 6. **Rezolvarea** cu ajutorul funcției de gradul I a unei situații-problemă și interpretarea rezultatului	**Funcția de gradul I** • Definiție; reprezentarea grafică a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, unde $a, b\in\mathbb{R}$, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația $f(x)=0$ • Interpretarea grafică a proprietăților algebrice ale funcției: monotonie, semnul funcției • Inecuații de forma $ax+b\le 0$ ($\ge, <, >$), $a, b\in\mathbb{R}$, studiate pe $\mathbb{R}$ • Poziția relativă a două drepte; sisteme de tipul $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$, a, b, c, m, n, p numere reale

Prezentați o activitate didactică elaborată în vederea formării a cel puțin două competențe din secvența de mai sus urmărind:

a) precizarea a două metode didactice și a modului de utilizare a acestora în vederea formării competențelor specifice alese;

b) menționarea a două forme de organizare a activității didactice justificând modul în care acestea pot favoriza formarea/dezvoltarea competențelor specifice alese;

c) precizarea a două mijloace de învățământ care pot fi folosite în activitatea didactică respectivă și motivarea utilizării acestora în formarea/dezvoltarea competențelor specifice alese.

Subiectul II

Elaborați un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme precizând pentru fiecare dintre acestea competențele specifice evaluate din cadrul următoarei secvențe a programei școlare de matematică pentru clasa a VII-a.

Competențe specifice	Conținuturi
1. **Recunoașterea și descrierea** patrulaterelor în configurații geometrice date 2. **Identificarea** patrulaterelor particulare utilizând proprietăți precizate 3. **Utilizarea** proprietăților calitative și metrice ale patrulaterelor în rezolvarea unor probleme 4. **Exprimarea** prin reprezentări geometrice a noțiunilor legate de patrulatere 5. **Alegerea** reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculelor de lungimi de segmente, de măsuri de unghiuri și de arii 6. **Interpretarea** informațiilor deduse din reprezentări geometrice în corelație cu anumite situații practice	**Patrulatere** • Patrulater convex (definiție, desen) • Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex • Paralelogram; proprietăți • Paralelograme particulare: dreptunghi, romb și pătrat; proprietăți • Trapez, clasificare; trapez isoscel, proprietăți • Arii (triunghiuri, patrulatere)

În elaborarea itemului de tip întrebare structurată succesiunea cerințelor va asigura creșterea treptată a gradului de dificultate, iar răspunsul la fiecare cerință nu va depinde de răspunsul la cerința precedentă.

Ploiești

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} (\alpha+1)x + y + z = 1 \\ x + (\alpha+1)y + z = \alpha \\ x + y + (\alpha+1)z = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvați acest sistem de ecuații în funcție de parametrul α.

b) Descrieți 3 posibile dificultăți pe care le-ar putea avea elevii în rezolvarea sistemului. Indicați modul în care ați putea interveni pentru a-i ajuta pe elevi să depășească aceste dificultăți.

2. Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

a) Să se reprezinte grafic funcția. Elaborați un barem de notare, rezolvând complet problema.

b) Să se determine aria domeniului mărginit de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 4$ și $x = 6$. Faceți câteva comentarii din punct de vedere metodic privind modul de determinare a ariei.

3. Linii importante într-un triunghi și concurența lor (tratare metodică). Tratați următoarele aspecte:

a) Definiți noțiunile de bisectoare interioară, mediană, mediatoare, înălțime și indicați cum se numesc punctele de concurență pentru fiecare categorie de linii importante.

b) Demonstrați concurența medianelor unui triunghi și indicați poziționarea punctului de intersecție a acestora față de laturile și vârfurile triunghiului.

c) Exemplificați fundamentarea cunoștințelor prin rezolvarea următoarei probleme:

Fie ABC un triunghi, $[AD$ bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BAC}$, unde $D \in (BC)$. Să se arate că:

$$AD^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2},$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor BC, AC, respectiv AB, iar p este semiperimetrul triunghiului ABC.

GRADUL II, 2016

Iași

1. Elaborați un proiect didactic pentru lecția de predare „*Ecuații ale dreptei în plan*" (clasa a X-a, geometrie), prezentând:

- Ecuația determinată de un punct și o pantă (punct și direcție), ecuația determinată de două puncte, ecuațiile parametrice, ecuația generală (cu justificarea lor).
- Rezolvați și comentați din punct de vedere metodic exercițiul:

Să se determine mulțimea punctelor M din plan cu proprietatea că există $t \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\overrightarrow{OM} = (4-t)\overrightarrow{\imath} + (3t-2)\overrightarrow{\jmath},$$

unde $\{O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\}$ este un reper cartezian.

2. Exemplificați fundamentarea cunoștințelor de divizibilitate prin rezolvarea următorului exercițiu:

Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci arătați că $3n^2 - 1$ nu se divide nici cu 3, nici cu 5 și nici cu 7.

3. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

a) Să se traseze graficul și să se determine punctele de pe grafic în care tangenta este paralelă cu dreapta de ecuație $9y = 2x$.

b) Elaborați un barem de notare pentru punctul **a)**.

București

1. Se consideră următoarea problemă:

Dacă $A = \{a + bi \mid \text{a, b} \in \mathbb{N}^*\}$, atunci pentru orice $z \in A$, există $n \in \mathbb{N}^*$ cu $z^n \notin A$.

a) Verificați pe două cazuri particulare dacă problema este adevărată.
b) Ce rol ar putea avea, în rezolvarea la clasă a problemei, studiul unor cazuri particulare?
c) Rezolvați problema dată.
d) Anticipați două dificultăți pe care le-ar putea avea elevii în rezolvarea problemei.
e) Reformulați enunțul problemei, astfel ca noua problemă să poată fi rezolvată folosind același argument.

2. **a)** Să se arate că ecuația $x + \ln|x| = 0$ are o soluție reală unică $x_0 \in (0, 1)$. Comentați, din punct de vedere metodic, dificultățile pe care le-ar putea întâmpina elevii în rezolvarea problemei.

b) Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + \ln|x|}, & \text{dacă } x \neq 0 \text{ și } x \neq x_0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției f în punctul $x = 0$. Să se determine punctele de extrem local ale funcției f. Precizați, în legătură cu Teorema lui Fermat, ce greșeală ar putea face elevii la determinarea punctelor de extrem ale funcției anterioare.

c) Să se calculeze $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x+1}{x^2 + x\ln x}\,\mathrm{d}x$. Dați un alt exemplu de integrală definită care să conțină expresia $\dfrac{1}{x + \ln x}$ și care poate fi calculată prin metoda substituției (schimbării de variabilă).

3. Se consideră următorul enunț:

Fie ABC un triunghi și P un punct situat pe cercul circumscris triunghiului. Fie L, M și N picioarele perpendicularelor duse din punctul P pe dreptele AC, BC, respectiv AB. Atunci punctele L, M și N sunt coliniare.

a) Identificați cel puțin trei noțiuni geometrice ce apar în acest enunț și descrieți modul cum le puteți introduce la clasă.
b) Demonstrați acest enunț folosind (eventual) mai multe metode.
c) Enunțați o (posibilă) reciprocă a acestui enunț.
d) Decideți, cu justificare, dacă următorul enunț este adevărat:
Printr-un punct P al unui cerc se construiesc coardele $[PA]$, $[PB]$ și $[PC]$. Pe fiecare coardă ca diametru se construiește câte un cerc. Atunci aceste cercuri se intersectează două câte două în trei puncte (diferite de P) coliniare.

Ploiești

1. Elaborați un proiect didactic pentru lecție „*Funcții injective, surjective, bijective*" (definiții, proprietăți, exemple, contraexemple; pentru proprietățile prezentate în cadrul lecției se vor da demonstrațiile complete).
2. Exemplificați fundamentarea noilor cunoștințe prin rezolvarea următoarelor probleme. Descrieți care credeți că sunt dificultățile pe care le-ar putea avea un elev în rezolvarea acestor probleme. Indicați modul în care ați putea interveni pentru a-i ajuta pe elevi să depășească aceste dificultăți:
   a) Se consideră mulțimea $G \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$, $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q},\, a^2 - 10b^2 = 1 \right\}$.
      (i) Să se verifice că $A = \begin{pmatrix} 19 & 60 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \in G$.
      (ii) Să se arate că $XY \in G$, pentru orice $X, Y \in G$.
      (iii) Să se demonstreze că mulțimea G este infinită.
   b) Să se arate că în orice triunghi ABC sunt adevărate următoarele formule:
      (i) $S = p \cdot r$;
      (ii) $S = \dfrac{abc}{4R}$,
      unde r și R sunt razele cercului înscris, respectiv circumscris triunghiului ABC, cu a, b și c s-au notat lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB, cu p s-a notat semiperimetrul triunghiului ABC, iar cu S aria acestui triunghi.
3. Pentru evaluarea finală a cunoștințelor de analiză matematică pentru clasa a XI-a, elevii primesc următorul subiect:
   Să se enunțe teorema lui L'Hôpital și să se calculeze cu ajutorul ei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + x\cos x}{e^x - e^{-x} - 2\sin x}$.
   Faceți câteva comentarii din punct de vedere metodic privind modul de calcul al limitei. Elaborați un barem de corectare, rezolvând complet problema.

GRADUL II, 2017

Cluj-Napoca

1. **a)** Descrieți două metode de calcul a unor limite de șiruri utilizând integrala definită.

b) Să se calculeze:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$.

2. **a)** Descrieți metoda inducției matematice.

b) Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

(i) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. **a)** Descrieți 4 metode de demonstrare a coliniarității a trei puncte.

b) Să se rezolve problemele:

(i) Fie $ABCD$ un trapez ortodiagonal și M, N mijloacele bazelor trapezului. Dacă O este de punctul de intersecție a diagonalelor acestuia, atunci să se arate că punctele M, N și O sunt coliniare.

(ii) Pe o latură a unui unghi se iau punctele A, B, iar pe cealaltă latură punctele C, D. Fie $\{E\} = AD \cap BC$, F intersecția paralelelor duse prin A și C la laturile unghiului și G intersecția paralelelor duse prin B și D la aceleași laturi. Să se demonstreze că punctele E, F și G sunt coliniare.

Sibiu

1. Descrieți metoda învățării prin descoperire și dați două exemple de utilizare a acesteia, unul din programa de gimnaziu și altul din cea de liceu.

2. Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VI-a, Geometrie (*conform planurilor-cadru aprobate prin OMECI nr.* 5097 *din* 09.09.2009)

Competențe specifice	Conținuturi
1. **Recunoașterea** și descrierea unor proprietăți ale triunghiurilor în configurații geometrice date 2. **Calcularea** unor lungimi de segmente și a unor măsuri de unghiuri utilizând metode adecvate 3. **Utilizarea** unor concepte matematice în triunghiul isoscel, în triunghiul echilateral sau în triunghiul dreptunghic 4. **Exprimarea** caracteristicilor matematice ale triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi prin definiții, notații și desen 5. **Deducerea** unor proprietăți ale triunghiurilor folosind noțiunile studiate 6. **Interpretarea** informațiilor conținute în probleme legate de proprietăți ale triunghiurilor	**Proprietăți ale triunghiurilor** • Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior • Mediana în triunghi; concurența medianelor unui triunghi (fără demonstrație) • Proprietăți ale triunghiului isoscel (unghiuri, linii importante, simetrie) • Proprietăți ale triunghiului echilateral (unghiuri, linii importante, simetrie) • Proprietăți ale triunghiului dreptunghic (cateta opusă unghiului de $30°$, mediana corespunzătoare ipotenuzei – teoreme directe și reciproce)

a) Descrieți două metode de predare-învățare folosite în alcătuirea unui demers didactic elaborat în vederea formării competențelor precizate în secvența de mai sus și justificați modul în care aceste metode pot determina formarea competențelor respective.

b) Precizați două mijloace moderne de învățământ folosite în formarea/dezvoltarea într-un mod creativ și atractiv a competențelor specifice precizate în secvența de mai sus.

c) Elaborați trei itemi: *de completare*, *cu alegere multiplă* (cu un singur răspuns corect), *cu alegere duală*, folosiți în scopul evaluării a cinci dintre competențele specifice prezentate în secvența de mai sus, precizând pentru fiecare item competența/competențele evaluate.

Iași

1. Elaborați un proiect didactic pentru lecția „*Teorema împărțirii cu rest în* $\mathbb{N}$" (enunț, demonstrație, considerații metodice).

2. Exemplificați fundamentarea cunoștințelor de geometrie vectorială prin rezolvarea următorului exercițiu:

În reperul ortonormat $\mathscr{R}(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, să se afle vectorul legat în origine care are lungimea 2 și este perpendicular pe vectorul legat în origine $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$.

3. Rezolvați și elaborați baremele de rezolvare pentru următoarele probleme:

a) Fie funcția $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + a, & x \in [-1; 0] \\ ax + 1, & x \in (0; 1] \end{cases}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f admite primitive.

b) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$, de parități diferite, $m > n$. Notăm $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$. Să se arate că:

(i) $4 \mid y$;

(ii) $3 \mid x$ sau $3 \mid y$;

(iii) aria triunghiului de laturi x, y, z este un număr divizibil cu 6.

VARIANTA a II-a (subiect de rezervă)

1. Elaborați un proiect didactic pentru lecția „*Teorema celor trei perpendiculare*" (enunț, demonstrație, considerații metodice).

2. Exemplificați fundamentarea cunoștințelor de algebră prin rezolvarea următorului exercițiu:

Fie $Ax^2 + Bx + C = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$, unde $A, B, C, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ și $A \neq 0$. Notăm cu $H = \max\{A, B, C\}$, $h_i = \max\{|a_i|, |b_i|\}$, unde $i \in \{1, 2\}$. Arătați că:

$$\frac{h_1h_2}{2} < H \leq 2h_1h_2.$$

3. Să se rezolve și să se elaboreze baremele de notare pentru următoarele probleme:

a) Să se determine ecuația dreptei care în reperul ortonormat $\mathscr{R}(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ este paralelă cu direcția vectorului $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ și trece prin punctul $P(-2, 1)$.

b) Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{x}{x+1}$. Să se traseze graficul funcției și să se determine tangentele la grafic paralele cu dreapta $d : y = -\dfrac{1}{3}x + 1$.

VARIANTA a III-a (subiect de rezervă)

1. Elaborați un proiect didactic pentru lecția „*Funcții injective, surjective, bijective*" (definiții, proprietăți, exemple).

2. Prezentați trei procedee uzuale de stabilire a coliniarității a trei puncte. Exemplificați fundamentarea cunoștințelor de geometrie prin rezolvarea următorului exercițiu:

Să se arate că într-un paralelogram mijloacele a două laturi opuse și punctul de intersecție a diagonalelor sunt coliniare.

3. Să se rezolve și să se elaboreze baremele de notare pentru următoarele probleme:

a) Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile astfel încât $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

b) Fie $Ax^2 + Bx + C = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$, unde $A, B, C, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ și $A \neq 0$. Notăm cu $H = \max\{A, B, C\}$, $h_i = \max\{|a_i|, |b_i|\}$, unde $i \in \{1, 2\}$. Arătați că:

$$\frac{h_1h_2}{2} < H \leq 2h_1h_2.$$