V. Barem

Problema 1:

$N=\overline{abc2018}$ .... $\boxed{1p}$

$9\mid N$ (N – suma a două numere naturale consecutive) .... $\boxed{1p}$

N - are suma cifrelor $a+b+c+2+1+0+8=11+a+b+c$ .... $\boxed{1p}$

$9\mid(11+a+b+c)$ .... $\boxed{1p}$

$a+b+c=7+9m$ .... $\boxed{1p}$

Cel mai mic număr $\Rightarrow a+b+c=7$ cu $a=1,\ b=0,\ c=9,\ N=1062018$ .... $\boxed{1p}$

$N=117998+117999+...+118006$ .... $\boxed{1p}$

Problema 2:

$S=9+99+999+9999+...+\underbrace{999...999}_{2019\ ori}+2018$

$S=(10-1)+(100-1)+(1000-1)+...+(1\underbrace{000...000}_{2019\ ori}-1)+2018$ .... $\boxed{2p}$

$S=(10+100+1000+...+1\underbrace{000...000}_{2019\ ori})-(\underbrace{1+1+1+...+1+1}_{2019\ ori})+2018$ .... $\boxed{2p}$

$S=\underbrace{111...111}_{2019\ ori}0-2019+2018$ .... $\boxed{1p}$

$S=\underbrace{111...111}_{2015\ ori}09091+2018$ .... $\boxed{1p}$

$S=\underbrace{111...111}_{2018\ ori}09\Rightarrow U_5(S)=11109$ .... $\boxed{1p}$

Problema 3:

$17^n=M_4+1,\ \ 21^n=M_4+1,\ \ 24^n=M_4,\ \ 25^n=M_4+1$ .... $\boxed{5p}$

$17^n+21^n+24^n=M_4+3$, deci nu poate fi pătrat perfect.. $\boxed{2p}$

Problema 4:

Toate numerele de o cifră: $0,1,2,...,9$ sunt simetrice $\Rightarrow 10$ numere .... $\boxed{1p}$

Numerele de două cifre simetrice sunt $11,22,...,99$ $\Rightarrow 9$ numere........................ $\boxed{1p}$

Numerele de trei cifre simetrice sunt de forma $\overline{1a1},\overline{2a2},...,\overline{9a9}$, unde $a=0,...,9$ $\Rightarrow 90$ numere........ $\boxed{3p}$

Numerele de patru cifre simetrice mai mici decat 2018 sunt de forma

$\overline{1aa1}$, unde $a=0,...,9$ $\Rightarrow 10$ numere

2002 $\Rightarrow 1$ numar.. $\boxed{1p}$

In total avem 10+9+90+10+1=120 numere simetrice.. $\boxed{1p}$

BAREM CLASA A VI-A

Problema 1.

a) Fie S suma elementelor mulțimii A.

Punem condițiile: (1) $S-x_i=343i^3, i=1,2,3,...,344$ .... $\boxed{2p}$

Adunăm (1) $\Rightarrow S=1^3+2^3+...+344^3$ .... $\boxed{1p}$

Din (1) $\rightarrow x_k=S-343\cdot k^3, k=1,2,3,...,344$ .... $\boxed{2p}$

b) $x_1+x_2+...+x_{99}+x_{101}+x_{102}+...+x_{344}=(7\cdot 100)^3$ .... $\boxed{1p}$

c) $S=1^3+2^3+...+344^3=(172\cdot 345)^2$ .... $\boxed{1p}$

Problema 2.

Din $\frac{2a}{3b+4c}=\frac{3b}{2a+4c}=\frac{4c}{2a+3b}=\frac{2a+3b+4c}{3b+4c+2a+4c+2a+3b}=\frac{2a+3b+4c}{4a+6b+8c}=\frac{1}{2}$ .... $\boxed{1p}$

Notăm $2a=x, 3b=y, 4c=z \rightarrow \frac{x}{3b+4c}=\frac{1}{2}\rightarrow 2x=3b+4c\rightarrow 2x=y+z$ .... $\boxed{1p}$

$\frac{y}{2a+4c}=\frac{1}{2}\rightarrow 2y=2a+4c\rightarrow 2y=x+z$ .... $\boxed{1p}$

$\frac{z}{2a+3b}=\frac{1}{2}\rightarrow 2z=2a+3b\rightarrow 2z=x+y$ .... $\boxed{1p}$

Scădem $2x-2y=y+z-(x+z)\Rightarrow 2x-2y=y+z-x-z\Rightarrow x=y(1)$

$2x-2z=y+z-(x+y)\Rightarrow 2x-2z=y+z-x-y\Rightarrow x=z(2)$ .... $\boxed{1p}$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow x=y=z$

Din $x=y=z\Rightarrow 2a=3b=4c=p$ .... $\boxed{1p}$

$2a=p\Rightarrow a=\frac{p}{2}; 3b=p\Rightarrow b=\frac{p}{3}; 4c=p\Rightarrow c=\frac{p}{4}$

$(a+3b+2c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{2c}\right)=\left(\frac{p}{2}+p+\frac{p}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{p}+\frac{1}{p}+\frac{2}{p}\right)=2p.\frac{5}{p}=10$ .... $\boxed{1p}$

Problema 3.

$\Delta ABE\equiv\Delta CBE(L.U.L)(1)$ .... $\boxed{1p}$

În $\Delta ABE\Rightarrow m(\measuredangle AEB)=105^\circ$ .... $\boxed{1p}$

Astfel

$$m(\measuredangle FEC)=360^\circ-[m(\measuredangle FEA)+m(\measuredangle AEB)+m(\measuredangle BEC)]=$$
$$=360^\circ-(60^\circ+2\cdot 105^\circ)=90^\circ\ (2)$$ .... $\boxed{1p}$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \Delta EFC$ -dreptunghic isoscel.. $\boxed{1p}$

Notăm M-mijlocul lui CF$\Rightarrow$ $EM=EF=\dfrac{CF}{2}\Rightarrow m(\measuredangle MEF)=m(\measuredangle MFE)=45^\circ$ .... $\boxed{1p}$

$m(\measuredangle AEM)=105^\circ$
$m(\measuredangle AFC)=105^\circ$ .... $\boxed{1p}$

$\triangle AFM\equiv\triangle AEM$

Finalizare FC=2EB.. $\boxed{1p}$

Problema 4. Fie 1- unitatea pe care melcul o parcurge în 15 min .... $\boxed{1p}$

Presupunem că s-a întors “acasă ” după N unități verticale........................... $\boxed{1p}$

Melcul trebuie să parcurgă N unități orizontale .... $\boxed{1p}$

Timpul total $2N\cdot 15=30N$ (minute).. $\boxed{1p}$

N-par (nr segmentelor parcurse “în sus” este egal cu numărul de segmente parcurse “în jos”)... $\boxed{2p}$

Finalizare .... $\boxed{2p}$

VII. Barem

Problema 1:

Din inegalitatea mediilor $\Rightarrow\ abc \le \frac{k^3}{27}$; egalitatea având loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{k}{3}$ .... $\boxed{1p}$

Pe de altă parte,

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)\ge$ (din $ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$, ...) $\ge(a+b+c)^2-2\left(a^2+b^2+c^2\right)$ .... $\boxed{2p}$

Urmează că $a^2+b^2+c^2\ge\frac{k^2}{3}$; egalitatea având loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{k}{3}$ .... $\boxed{1p}$

Dar

$$ab+bc+ac=\frac{(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}\le\frac{k^2-\frac{k^2}{3}}{2}=\frac{k^2}{3};$$

egalitatea având loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{k}{3}$ .... $\boxed{1p}$

Din cele mai sus, obținem că

$$9abc+11(ab+bc+ac)-13\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 9\frac{k^3}{27}+11\frac{k^2}{3}-13\frac{k^2}{3}=\frac{k^2(k-2)}{3};$$

egalitatea având loc dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{k}{3}$ .... $\boxed{1p}$

Problema 2:

Din inegalitatea mediilor $ab+1\ge 2\sqrt{ab},\ a^2+b\ge 2a\sqrt{b},\ a+b^2\ge 2b\sqrt{a}$ .... $\boxed{1p}$

$\frac{1}{2}(a+b+ab)=\frac{ab}{ab+1}+\frac{a^2b}{a^2+b}+\frac{ab^2}{a+b^2}\quad /\cdot 4\Rightarrow$ .... $\boxed{1p}$

$\Rightarrow 2(a+b+ab)-4\left(\frac{ab}{ab+1}+\frac{a^2b}{a^2+b}+\frac{ab^2}{a+b^2}\right)\ge 2(a+b+ab)-2\left(\sqrt{ab}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\right)=$

$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{ab}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{ab}\right)^2\ge 0$ .... $\boxed{4p}$

Egalitatea $a=b=1$.

Problema 3:

Fie E mijlocul diagonalei (BD) și F mijlocul diagonalei (AC).

Notăm cu M intersecția paralelei dacă prin E la AC cu paralela duse prin F la BD. Arătăm că punctul M este cel căutat. Este suficient să arătăm că $S[BKML]=\frac{1}{4}\cdot S[ABCD]=\frac{216}{4}=54\ cm^2$ .... $\boxed{1p}$

Fiind că AE este mediană în $\triangle ADE\Rightarrow S[ABE]=S[ADE]$ (1)

CE mediană în $\triangle CDB\Rightarrow S[BEC]=S[CED]$ (2) .... $\boxed{1p}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$

$S[ABE]+S[BEC]=S[ADE]+S[CED]\Leftrightarrow S[ABCE]=S[ADCE]=\frac{S[ABCD]}{2}=\frac{216}{2}=108\ cm^2$ .... $\boxed{1p}$

$S[BEL]=\frac{S[ABE]}{2}$ și $S[BEK]=\frac{S[BEC]}{2}\Rightarrow$ .... $\boxed{1p}$

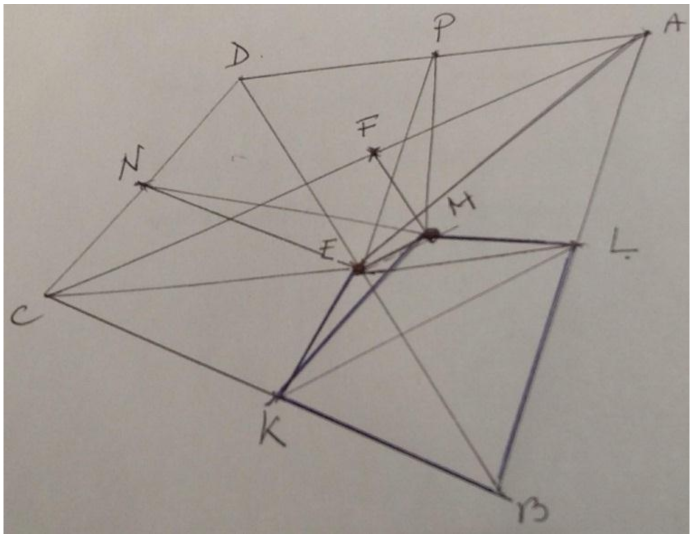
$\Rightarrow S[BEL]+S[BEK]=\frac{1}{2}S[ABE]+S[BEC]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S[BKEL]=\frac{1}{2}S[ABCE]=\frac{1}{2}\frac{S[ABCD]}{2}=\frac{1}{4}S[ABCD]=54\ cm^2$ .... $\boxed{1p}$

KL este linie mijlocie în $\triangle ABC\Rightarrow KL\parallel AC$. Fiindcă $AC\parallel EM\Rightarrow KL\parallel EM\Rightarrow S[KLE]=S[KLM]\ (3)$ ...... $\boxed{1p}$

Cum $S[BKEL]=S[BKL]+S[KEL]$ cu (3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S[BKEL]=S[BKL]+S[KLM]=S[BKML]\Rightarrow S[BKML]=54\ cm^2$ .... $\boxed{1p}$



Problema 4:

a) $m(\sphericalangle NAC)+m(\sphericalangle NBC)=180^\circ$

$m(\sphericalangle NCB)+m(\sphericalangle NAB)=30^\circ\Rightarrow AB\perp CN$ .... $\boxed{2p}$

b) $\triangle BNC$ isoscel cu $CB=CN$

Prelungim NA cu $AM=AB$

$\triangle ACB\equiv\triangle ACM$ .... $\boxed{1p}$

$\triangle MNC$ echilateral $\Rightarrow NM=NC\Rightarrow AB+AN+NC=2BC$ .... $\boxed{1p}$

c) Notăm $AB\cap CN=\{O\}\Rightarrow\triangle AON\sim\triangle COB$ .... $\boxed{1p}$

$\triangle BOC$ dreptunghi $\Rightarrow CO=\frac{\sqrt{3}}{2},\ OB=\frac{BC}{2}$

$AN=(2+\sqrt{3})BC$ .... $\boxed{2p}$

BAREM CLASA A VIII-A

Problema 1.

Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există numerele naturale m,n,p,q astfel ca $m^2+n=p^2-1$ şi $n^2+m=q^2-2$.. $\boxed{1p}$

Din $m^2+n=p^2-1$ deducem că m^2+n+1 este pp, prin urmare numărul $\sqrt{m^2+n+1}$ este natural. .... $\boxed{1p}$

Intrucât $m^2+n+1>m^2$ obţinem că $\sqrt{m^2+n+1}>m$ şi deci $\sqrt{m^2+n+1}\geq m+1$ $\boxed{1p}$

Aşadar $m^2+n+1\geq(m+1)^2$ de unde obţinem că $n\geq 2m$ (*)......................... $\boxed{1p}$

Analog, din $n^2+m=q^2-2$, deducem că n^2+m+2 este pp, prin urmare numărul $\sqrt{n^2+m+2}$ este natural. .... $\boxed{1p}$

Intrucât $n^2+m+2>n^2$ obţinem că $\sqrt{n^2+m+2}>n$ şi deci $\sqrt{n^2+m+2}\geq n+1$

sau echivalent $m+1\geq 2n$ (**)

Acum, din (*) şi (**), prin adunare obţinem $m+n\leq 1$. Aşadar $(n,m)=(0,1)$ sau $(n,m)=(1,0)$. Cum nici una dintre cele două valori nu verifică egalităţile date, concluzionăm că problema este rezolvată. .... $\boxed{2p}$

Problema 2.

Din egalitatea din enunţ avem că

(1) $b=\dfrac{1-a}{8a+1}$ .... $\boxed{1p}$

Deoarece $b\geq 0$, din (1) rezultă că $a\leq 1$, deci

(2) $a\in[0,1]$ .... $\boxed{1p}$

(3) Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu inegalitatea $a+b+2\sqrt{ab}\geq 1$ şi înlocuind pe b din relaţia (1), ... $\boxed{1p}$

avem echivalent cu

(3) $2\sqrt{\dfrac{a(1-a)}{8a+1}}\geq 8\dfrac{a(1-a)}{8a+1}$ .... $\boxed{1p}$

Pentru $a\in\{0,1\}$, inegalitatea (3) are loc egalitate. .... $\boxed{1p}$

Fie $a \in (0,1)$. Inegalitatea (3) este echivalentă cu $1 \geq 4\sqrt{\frac{a(1-a)}{8a+1}}$, echivalent cu $(4a-1)^2 \geq 0$, care este o inegalitate adevărată. .... $\boxed{1p}$

Deci (3) are loc, adică inegalitatea din enunț este adevărată.

Egalitatea are loc dacă si numai dacă $(a=0 \;\; si \;\; b=1)$ sau $(a=1 \;\; si \;\; b=0)$ sau $a=b=\frac{1}{4}$

.... $\boxed{1p}$

Problema 3. Aratam mai intâi că $AG_A < \frac{AB+AC+AD}{3}$

Fie E mijlocul lui (CD) $\Rightarrow AE < \frac{AC+AD}{2}$ $(*)$ .... $\boxed{2p}$

In $\triangle ABE$ deducem $G_AG_{A'} \parallel AB, \;\; G_{A'} \in (AE)$

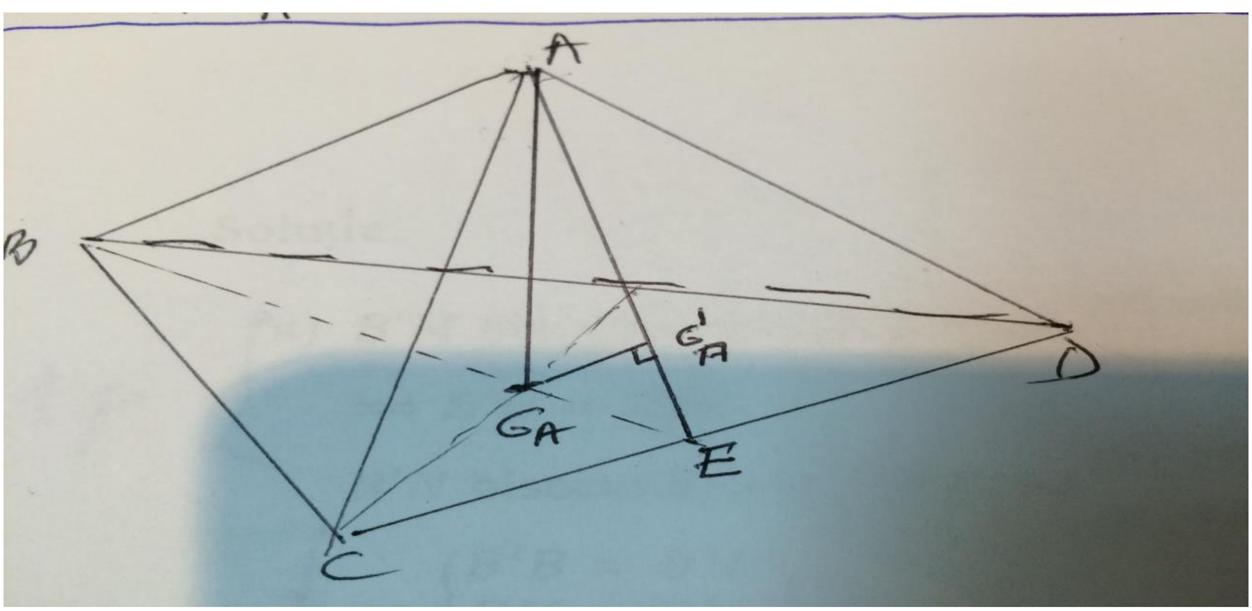
Avem $G_AG_{A'} = \frac{AB}{3}, \;\; AG_{A'} = \frac{2AE}{3}$ .... $\boxed{1p}$

Obtinem $AG_A < G_AG_{A'} + AG_{A'} < \frac{AB+AC+AD}{3}$ (1) (Am folosit (*))...... $\boxed{2p}$

Cu (1) obținem

$$AG_A + BG_B + CG_C + DG_D < \frac{2(AB+AC+AD+BC+CD+DB)}{3} = \frac{2 \cdot 24}{3} = 16$$

Deci $AG_A + BG_B + CG_C + DG_D < 16$ .... $\boxed{2p}$



Problema 4

a) B'M bisectoarea $\measuredangle A'B'B \Rightarrow m(\measuredangle BB'M) = 45^\circ$, $m(\measuredangle B'BM) = 90^\circ \Rightarrow \triangle BB'M$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow B'B = BM$ .... $\boxed{1p}$

B'N bisectoarea $\measuredangle C'B'B \Rightarrow m(\measuredangle BB'N) = 45^\circ$, $m(\measuredangle B'BN) = 90^\circ \Rightarrow \triangle BB'N$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow \begin{cases} B'B = BN \\ BM = BN \\ AM = CN \end{cases}$ .... $\boxed{1p}$

Din $\left.\begin{matrix} BN = BM \\ BA = BC \end{matrix}\right\} \overset{R.T.Thales}{\Rightarrow} MN \parallel AC\,(1)$ .... $\boxed{1p}$

$$\left.\begin{matrix} A'E \text{ bisectoarea } \measuredangle A'B'M \Rightarrow \dfrac{B'E}{EM} = \dfrac{A'B'}{A'M} \\ C'F \text{ bisectoarea } \measuredangle NC'B' \Rightarrow \dfrac{B'F}{FN} = \dfrac{C'B'}{C'N} \\ \triangle A'AM \equiv \triangle C'CN\ (C.C.) \Rightarrow A'M = C'N \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{B'E}{EM} = \frac{B'F}{FN} \overset{R.Thales}{\Rightarrow} EF \parallel MN\,(2)$$

Din (1) si (2) $\Rightarrow EF \parallel AC \Rightarrow EF \parallel (AA'C)$. .... $\boxed{1p}$

b) Notăm $C'F \cap CB = \{Q\}$

$\left.\begin{matrix} \sphericalangle B'C'Q \equiv \measuredangle CQC'(alt.\text{int}.) \\ \sphericalangle B'C'Q \equiv \measuredangle NC'Q(bisect.) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sphericalangle NC'Q \equiv \sphericalangle NQC' \Rightarrow \triangle NQC'\, isoscel\ cu\ NQ = NC'$ ..... $\boxed{1p}$

In $\triangle NCC'$: $m(\sphericalangle C) = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora

$C'N^2 = CC'^2 + CN^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow C'N = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow QN = a\sqrt{5} \Rightarrow QB = QN - BN = a(\sqrt{5}-1)$ .... $\boxed{1p}$

$\Rightarrow QC = QN + NC = a(\sqrt{5}-1) + 2a = a(\sqrt{5}+1)$

$BP \parallel C'C \Rightarrow \triangle QBP \sim \triangle QCC' \Rightarrow \dfrac{QB}{QC} = \dfrac{BP}{CC'}$

$\Rightarrow BP = \dfrac{QB \cdot CC'}{QC} = \dfrac{a(\sqrt{5}-1).a}{a(\sqrt{5}+1)} = \dfrac{a(3-\sqrt{5})}{2}$ .... $\boxed{1p}$