INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ – INFORMATICĂ
"GRIGORE MOISIL"
EDIȚIA a XXXIII – a
Tîrgu Mureş 23 – 25 martie 2018

Clasa a 5-a

1. Care este cel mai mic numar natural de 7 cifre care se termină în 2018 şi are proprietatea că este suma a nouă numere naturale consecutive ?

2. Fie suma
$$S = 9 + 99 + 999 + 9999 + ... + \underbrace{999\ldots9}_{2019\ \text{ori}} + 2018.$$
Determinaţi ultimele cinci cifre ale sumei.

3. Se dau numerele: $17^n, 21^n, 24^n, 25^n$. Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n, suma celor patru numere date nu poate fi pătrat perfect.

4. Un număr natural se numeşte *simetric* dacă el coincide cu numărul citit de la dreapta la stânga. De exemplu, numărul 383 este simetric. Să se determine câte numere mai mici decât 2018 sunt simetrice.

Timp de lucru 3 ore

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ – INFORMATICĂ
"GRIGORE MOISIL"
EDIȚIA a XXXIII – a
Tîrgu Mureș 23 – 25 martie 2018

Clasa a 6-a

1. 1) Determinaţi o mulţime $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{344}\}$ cu elemente numere naturale nenule, astfel încât suma oricăror 343 elemente să fie cub perfect.

   2) Calculaţi $x_1 + x_2 + \cdots + x_{99} + x_{101} + x_{102} + \cdots + x_{344}$.

   3) Arătaţi că suma elementelor mulţimii A este pătrat perfect.

2. Fie a, b, c numere raţionale pozitive astfel încât

$$\frac{2a}{3b+4c} = \frac{3b}{2a+4c} = \frac{4c}{2a+3b}.$$

   Calculaţi $(a + 3b + 2c) \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{2c})$.

3. Fie triunghiul $\triangle ABC$ dreptunghic isoscel cu $BA = BC$. Pe bisectoarea $\sphericalangle ABC$ se consideră punctul E astfel încât $m\,(\sphericalangle EAB) = 30^0$. Se construieşte triunghiul $\triangle AEF$ echilateral cu F şi B de o parte şi de alta a lui AC. Arătaţi că $FC = 2.EB$.

4. Un melc se târăşte în plan cu viteză constantă, schimbându-şi direcţia cu 90° la fiecare 15 minute. Demonstraţi că melcul se poate întoarce în punctul de plecare doar după un număr întreg de ore.

Timp de lucru 3 ore

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ – INFORMATICĂ
"GRIGORE MOISIL"
EDIȚIA a XXXIII – a
Tîrgu Mureş 23 – 25 martie 2018

Clasa a 7-a

1. Fie k un număr real strict pozitiv. Să se arate că dacă numerele reale pozitive a, b, c satisfac egalitatea $a + b + c = k$, atunci

$$9abc + 11\,(ab + bc + ac) - 13\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \leq \frac{k^2\,(k-2)}{3}.$$

   În ce caz are loc egalitatea?

2. Determinaţi toate numerele reale pozitive a şi b pentru care

$$\frac{ab}{ab+1} + \frac{a^2b}{a^2+b} + \frac{ab^2}{a+b^2} = \frac{1}{2}(a+b+ab).$$

3. Se consideră un patrulater convex $ABCD$ cu aria 216 cm^2. Fie L, K, N, P mijloacele laturilor $(AB), (BC), (CD)$ şi (DA). Să se găsească un punct M în interiorul patrulaterului astfel încât patrulaterele $DLMP, PMND, NCKM$ şi $BKML$ să fie echivalente.

4. Fie $\triangle ABC$ cu $m\,(\sphericalangle ABC) = 60^0$ şi $m\,(\sphericalangle ACB) = 45^0$. În exteriorul său se consideră punctul N astfel încât $m\,(\sphericalangle ABN) = 15^0$ şi $m\,(\sphericalangle BAN) = 30^0$. Arătaţi că:

   a) $AB \perp CN$.

   b) $BA + AN + NC = 2BC$.

   c) $AN = \left(2 - \sqrt{3}\right) BC$.

Timp de lucru 3 ore

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ – INFORMATICĂ
"GRIGORE MOISIL"
EDIȚIA a XXXIII – a
Tîrgu Mureș 23 – 25 martie 2018

Clasa a 8-a

1. Să se arate că nu există patru numere naturale m, n, p, q pentru care să avem satisfăcute simultan egalităţile

$$m^2 + n = p^2 - 1 \quad \text{şi} \quad n^2 + m = q^2 - 2.$$

2. Fie numerele reale $a, b \geq 0$ astfel încât $(8a+1)(8b+1) = 9$. Să se arate că

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 1.$$

3. Considerăm tetraedrul $ABCD$ şi notăm cu G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale feţelor opuse vârfurilor A, B, C, D. Să se arate că

$$AG_A + BG_B + CG_C + DG_D < 16,$$

ştiind că suma muchiilor tetraedrului este 24.

4. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu $AA' = a$ şi $BC = 3a$. Notăm cu $B'M$ bisectoarea $\sphericalangle A'B'B$, $M \in AB$ şi cu $B'N$ bisectoarea $\sphericalangle C'B'B$, $N \in BC$. Fie $A'E$ bisectoarea $\sphericalangle MA'B'$, $E \in B'M$ şi $C'F$ bisectoarea $\sphericalangle NC'B'$, $F \in B'N$.

   a) Arătaţi că $EF \| (AA'C)$.

   b) Dacă $BB' \cap C'F = \{P\}$, calculaţi BP.

Timp de lucru 3 ore