Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul complex z, știind că $2\overline{z}+iz=4+5i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-2x$. Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(f\circ f)(x)<x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+1}\cdot\sqrt[3]{27}=3^3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând o submulțime dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $A=\{0,1,2,3,4,5\}$, aceasta să conțină numai numere pare.

5p **5.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB=8$, $AD=4$ și punctul M, mijlocul laturii CD. Calculați lungimea vectorului $\vec{v}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BM}$.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\sin\frac{2x}{3}-\cos\frac{8x}{3}$, unde x este număr real. Arătați că numărul $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este natural.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a^2+a&a^2-a&1\\a^2-a&a^2+a&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(-2)\right)=-32$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\det\left(A(x)-xI_3\right)\geq 0$.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_a\left(a^2+a,a^2-a\right)$, unde a este număr real. Demonstrați că pentru orice număr real nenul a, punctele P_a, P_{-a} și O **nu** sunt coliniare.

2. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&2^x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Demonstrați că $M(x)\cdot M(-x)=M(0)$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Calculați inversa matricei $M(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că $\det\left(M(1)+M(2)+\ldots+M(n)\right)=2n^2\left(2^n-1\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n=f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(n)$ este descrescător.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^x+\sin(x-1)+m, & x\le 1\\ \dfrac{\sqrt{3x-2}-1}{x^2-1}, & x>1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\dfrac{3}{4}$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru $m=-\dfrac{5}{4}$, demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(0,2)$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2(a-ib)+i(a+ib)=4+5i \Leftrightarrow (2a-b)+i(a-2b)=4+5i$, unde $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$	**3p**
	$a=1$, $b=-2$, deci $z=1-2i$	**2p**
2.	$(f\circ f)(x)=3-2(3-2x)=4x-3$	**2p**
	$4x-3<x \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)$	**3p**
3.	$3^{x^2+1}\cdot 3^1=3^3 \Leftrightarrow x^2+2=3$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are C_6^2 submulțimi cu două elemente, deci numărul cazurilor posibile este egal cu 15	**1p**
	Mulțimea A are C_3^2 submulțimi cu două elemente care conțin numai numere pare, deci numărul cazurilor favorabile este egal cu 3	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, deci $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$	**3p**
	$AM=4\sqrt{2}$	**2p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{2\pi}{3}=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1\in\mathbb{N}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(-2)=\begin{pmatrix}2&6&1\\6&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(-2))=\begin{vmatrix}2&6&1\\6&2&1\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+0+0-0-0-36=-32$	**3p**
b)	$\det(A(x)-xI_3)=\begin{vmatrix}x^2&x^2-x&1\\x^2-x&x^2&1\\0&0&1-x\end{vmatrix}=x^2(1-x)(2x-1)$	**3p**
	$x^2(1-x)(2x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\cup\{0\}$	**2p**

c)	$\Delta=\begin{vmatrix} a^2+a & a^2-a & 1 \\ a^2-a & a^2+a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4a^3$	**2p**
	Pentru orice a număr real nenul, obținem $\Delta\neq 0$, deci punctele P_a, P_{-a} și O **nu** sunt coliniare	**3p**
2.a)	$M(x)\cdot M(-x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 2^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x+x \\ 0 & 2^x\cdot 2^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=M(0)$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$M(x)\cdot M(-x)=M(-x)\cdot M(x)=I_3$, pentru orice număr real x	**3p**
	Inversa matricei $M(x)$ este matricea $M(-x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 2^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$M(1)+M(2)+\ldots+M(n)=\begin{pmatrix} n & 0 & 1+2+\ldots+n \\ 0 & 2^1+2^2+\ldots+2^n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(M(1)+M(2)+\ldots+M(n)\right)=\begin{vmatrix} n & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 2\left(2^n-1\right) & 0 \\ 0 & 0 & n \end{vmatrix}=2n^2\left(2^n-1\right)$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x(x+1)^2}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2}{(x+1)^2}=2$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n+1)=1-\frac{1}{n^2+4n+4}<1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Cum $a_n>0$ pentru orice număr natural nenul n, obținem $a_{n+1}<a_n$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător	**2p**

2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\sqrt{3x-2}-1}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{3x-2-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{3x-2}+1\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{3}{(x+1)\left(\sqrt{3x-2}+1\right)}=\dfrac{3}{4}$	**2p**
b)	Pentru orice număr real m, funcția f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(2^x+\sin(x-1)+m\right)=2+m$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\dfrac{3}{4}$ și $f(1)=2+m$, deci funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{4}$	**3p**
c)	$f(0)=-\dfrac{1}{4}-\sin 1$, $f(2)=\dfrac{1}{3}$	**2p**
	f este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f(0)\cdot f(2)<0$, deci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(0,2)$	**3p**