Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $N=\log_5 7+\log_5 35-2\log_5 \frac{7}{25}$ este natural.
5p	**2.** Știind că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$, calculați $S=(f\circ f)(1)+(f\circ f)(2)+\ldots+(f\circ f)(10)$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2+1\right)+3=\log_2\left(7x^2+9\right)$.
5p	**4.** Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{i, i^2, i^3, i^4\right\}$, unde $i^2=-1$, acesta să fie număr real.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,n)$, $N(n,3)$ și $P(2n,5)$, unde n este număr natural. Știind că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MP}$ sunt coliniari, determinați numărul natural n.
5p	**6.** Arătați că $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $X(a)=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&9&1\\a&a^2&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(X(-1)\right)=12$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(X(a)-I_3\right)=0$.
5p	**c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(3,9)$ și $C\left(a,a^2\right)$, unde a este număr natural. Determinați numerele naturale a pentru care ABC este triunghi și are aria mai mică decât 3.
	2. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1+3x&3x\\-3x&1-3x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Demonstrați că $M(x)M(y)=M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați inversa matricei $M(x)$, unde x este număr real.
5p	**c)** Determinați numărul real pozitiv x pentru care are loc egalitatea $M\left(\sqrt{x}\right)M\left(\sqrt{x+5}\right)=M(5)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x}$.
5p	**a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$.
5p	**b)** Determinați ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că există un singur număr natural nenul m pentru care $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(mx)}{f(x)}=m^2-m$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2a-4, & x\in(-\infty,2)\\ 2^{x-1}-2, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4f(x)}{(1-2x)^2}=1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Demonstrați că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a<3$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,3)$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=\log_5(7\cdot 35)-\log_5\left(\frac{7}{25}\right)^2=$	**2p**
	$=\log_5\left(7\cdot 35\cdot\frac{25^2}{7^2}\right)=\log_5\left(5^5\right)=5\in\mathbb{N}$	**3p**
2.	$S=f\left(f(1)\right)+f\left(f(2)\right)+\ldots+f\left(f(10)\right)=5+6+7+\ldots+14=$	**3p**
	$=95$	**2p**
3.	$\log_2\left(x^2+1\right)+\log_2 8=\log_2\left(7x^2+9\right)\Rightarrow 8\left(x^2+1\right)=7x^2+9\Rightarrow x^2=1$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=1$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 4 elemente, deci sunt 4 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 2 numere reale, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{MN}=(n-1)\vec{i}+(3-n)\vec{j}$, $\overrightarrow{MP}=(2n-1)\vec{i}+(5-n)\vec{j}$	**2p**
	$\frac{n-1}{2n-1}=\frac{3-n}{5-n}$ și, cum n este număr natural, obținem $n=2$	**3p**
6.	$\cos\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}$	**2p**
	$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(-1)=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&9&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(X(-1)\right)=\begin{vmatrix}2&4&1\\3&9&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=18+3+(-4)-(-9)-12-2=12$	**3p**
b)	$\det\left(X(a)-I_3\right)=\begin{vmatrix}1&4&1\\3&8&1\\a&a^2&0\end{vmatrix}=2a^2-4a$	**3p**
	$2a^2-4a=0\Leftrightarrow a=0$ sau $a=2$	**2p**
c)	$\Delta=\begin{vmatrix}2&4&1\\3&9&1\\a&a^2&1\end{vmatrix}=a^2-5a+6$ și, cum ABC este triunghi, obținem $a^2-5a+6\neq 0$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, deci $\left\lvert a^2-5a+6\right\rvert<6$ și, cum a este număr natural, obținem $a=1$ sau $a=4$	**3p**

2.a)	$M(x)M(y)=\begin{pmatrix}1+3y+3x+9xy-9xy & 3y+9xy+3x-9xy\\ -3x-9xy-3y+9xy & -9xy+1-3y-3x+9xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+3(x+y) & 3(x+y)\\ -3(x+y) & 1-3(x+y)\end{pmatrix}=M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$M(x)M(-x)=M(x+(-x))=M(0)=I_2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$M(-x)M(x)=M((-x)+x)=M(0)=I_2$, pentru orice număr real x, deci inversa matricei $M(x)$ este matricea $M(-x)=\begin{pmatrix}1-3x & -3x\\ 3x & 1+3x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
c)	$M\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+5}\right)=M(5)$, deci $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$	**2p**
	$x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x}=\frac{3}{2}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{x}=-1$, deci dreapta de ecuație $y=x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(mx)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{m^2x^2-mx-2}{mx}\cdot\frac{x}{x^2-x-2}\right)=m$	**3p**
	Cum m este nenul, din $m=m^2-m$, obținem $m=2$, deci există un singur număr natural nenul m care verifică relația	**2p**
2.a)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4f(x)}{(1-2x)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4\left(x^2-ax+2a-4\right)}{1-4x+4x^2}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2-4ax+8a-16}{4x^2-4x+1}=1$, pentru orice număr real a	**3p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(x^2-ax+2a-4\right)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(2^{x-1}-2\right)=0$ și, cum $f(2)=0$, obținem $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$, deci funcția f este continuă în $x=2$, pentru orice număr real a	**3p**
	Cum, pentru orice număr real a, funcția f este continuă pe $(-\infty,2)$ și pe $(2,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$f(1)=a-3$, $f(3)=2$	**3p**
	Pentru orice număr real a, $a<3$, $f(1)\cdot f(3)<0$ și, cum funcția f este continuă, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,3)$	**2p**