Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați conjugatul numărului complex $z=(1-i)(2+i)+5i$.
5p	**2.** Determinați numerele naturale n pentru care $n^2+n-12<0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x+1)=2\lg(x-5)$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are 45 de submulțimi cu două elemente.
5p	**5.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Știind că lungimea vectorului $\vec{v}$ este egală cu 20, determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$.
5p	**6.** Arătați că, dacă x este număr real pentru care $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$, atunci $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2x\\ -2x & 1 & -2x^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det(A(2))$.
5p	**b)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)+aA(0))=8$.
5p	**c)** Știind că $\det((m+n)A(x))=\det(mA(x))+\det(nA(x))+18$, pentru orice număr real x, determinați numerele naturale m și n, $m<n$.
	2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_7$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy+\hat{6}x+\hat{6}y+\hat{2}$.
5p	**a)** Demonstrați că $x*y=(x+\hat{6})(y+\hat{6})+\hat{1}$, pentru orice $x,\ y\in\mathbb{Z}_7$.
5p	**b)** Demonstrați că $x*\hat{1}=\hat{1}*x=\hat{1}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_7$.
5p	**c)** Calculați $\hat{0}*\hat{1}*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați punctele de extrem ale funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $(x-3)^2\le 4e^{1-x}$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+1, & x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.
5p	**a)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că $\int_{-1}^{e} f(x)\,dx=2\left(4-\sqrt{e}\right)$.
5p	**c)** Determinați numărul natural n pentru care $\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x)\,dx=\frac{7}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=3+4i$ $\overline{z}=3-4i$	**3p** **2p**
2.	Cum n este număr natural, $(n+4)(n-3)<0 \Rightarrow n<3$ $n=0$, $n=1$ sau $n=2$	**2p** **3p**
3.	$\lg(x+1)=\lg(x-5)^2 \Rightarrow x+1=(x-5)^2$ $x^2-11x+24=0 \Rightarrow x=3$, care nu verifică ecuația și $x=8$, care verifică ecuația	**2p** **3p**
4.	O mulțime cu n elemente are C_n^2 submulțimi cu două elemente $\frac{n(n-1)}{2}=45 \Rightarrow n=10$	**2p** **3p**
5.	$\vec{v}=2\overrightarrow{AC}$, deci $AC=10$ Cum $ABCD$ este dreptunghi, obținem $BD=10$	**3p** **2p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2=2 \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1}{2}$ $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&4\\-4&1&-8\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1&0&4\\-4&1&-8\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=1+0+0-0-0-0=1$	**2p** **3p**
b)	$\det(A(a)+aA(0))=\begin{vmatrix}a+1&0&2a\\-2a&a+1&-2a^2\\0&0&a+1\end{vmatrix}=(a+1)^3$ $(a+1)^3=2^3 \Rightarrow a=1$	**3p** **2p**
c)	$(m+n)^3=m^3+n^3+18$ $mn(m+n)=6$ deci, cum m și n sunt numere naturale și $m<n$, obținem $m=1$ și $n=2$	**2p** **3p**
2.a)	$x*y=(xy+\hat{6}x)+(\hat{6}y+\hat{1})+\hat{1}=$ $=x(y+\hat{6})+\hat{6}(y+\hat{6})+\hat{1}=(x+\hat{6})(y+\hat{6})+\hat{1}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_7$	**3p** **2p**
b)	$x*\hat{1}=(x+\hat{6})(\hat{1}+\hat{6})+\hat{1}=\hat{0}+\hat{1}=\hat{1}$ $\hat{1}*x=(\hat{1}+\hat{6})(x+\hat{6})+\hat{1}=\hat{0}+\hat{1}=\hat{1}=x*\hat{1}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_7$	**2p** **3p**

c)	$\hat{0}*\hat{1}*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}=\left(\hat{0}*\hat{1}\right)*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}=$	**3p**
	$=\hat{1}*\left(\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}\right)=\hat{1}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'\left(x^2-6x+9\right)+e^x\left(x^2-6x+9\right)'=$	**2p**
	$=e^x\left(x^2-6x+9+2x-6\right)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ și $x=3$	**2p**
	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)$, $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(1,3)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(3,+\infty)$, deci punctele de extrem ale funcției f sunt $x=1$ și $x=3$	**3p**
c)	f este crescătoare pe $x\in(-\infty,1]$ și descrescătoare pe $x\in[1,3]$, deci $f(x)\le f(1)$ pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**3p**
	$f(1)=4e$, deci $f(x)\le 4e\Leftrightarrow e^x(x-3)^2\le 4e\Leftrightarrow (x-3)^2\le 4e^{1-x}$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**2p**
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(3x^2-4x+1\right)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ și, cum $f(1)=0$, obținem $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, deci funcția f este continuă în $x=1$	**3p**
	Cum funcția f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\int_{-1}^{e} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{e} f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(3x^2-4x+1\right)dx+\int_{1}^{e}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=$	**2p**
	$=\left(x^3-2x^2+x\right)\Big\vert_{-1}^{1}+\left(2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}\right)\Big\vert_{1}^{e}=4-2\sqrt{e}+4=2\left(4-\sqrt{e}\right)$	**3p**
c)	$\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x)dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\dfrac{\ln^2 x}{x}dx=\dfrac{\ln^3 x}{3}\Big\vert_{e^n}^{e^{n+1}}=\dfrac{3n^2+3n+1}{3}$	**3p**
	$\dfrac{3n^2+3n+1}{3}=\dfrac{7}{3}$ și, cum n este număr natural, obținem $n=1$	**2p**