Concursul național de matematică

„Olimpiada satelor din România" 2018

Clasa a IV-a

Etapa județeană-17 martie 2018

Subiectul I

Arătaţi că **a** este sfertul lui **b** dacă:
[36 : (24 – a) + 29] : 5 = 7, iar b : [(921 – 639) : 6 – 39] = 9

7puncte

Subiectul II

La un chioşc sunt 1505 ziare şi reviste.După ce s-au vândut 101 ziare şi 60 de reviste, ziare au rămas de două ori mai multe decât reviste.

Câte ziare şi câte reviste erau la început?

*Gazeta Matematică,*octombrie 2017

7puncte

Subiectul III

Un grup de elevi aflaţi în excursie,dorind să traverseze un râu, a constatat că,dacă rămâneau 4 elevi pe mal,se puteau îmbarca câte 6 într-o barcă,iar dacă se îmbarcau câte 8,rămânea o barcă liberă.

Câte bărci şi câţi elevi erau?

7puncte

Subiectul IV

Harry are înălţimea de 160 cm şi bagheta sa magică măsoară 2 cm. După fiecare magie făcută, lungimea baghetei sale se dublează şi se lungeşte cu încă 1cm.

Care este cel mai mic număr de magii făcute de Harry,astfel încât bagheta să măsoare mai mult decât înălţimea sa?

7puncte

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 2 ore

Concursul național de matematică

„Olimpiada satelor din România"2018

Clasa a IV-a

Etapa județeană- 17 martie 2018

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I

Aflăm valoarea lui **a** (4 puncte)

[36 : (24 – a) + 29] : 5 = 7	
[36 : (24 – a) + 29] = 7 x 5	(0,50 puncte)
[36 : (24 – a) + 29] = 35	(0,50 puncte)
36 : (24 – a) = 35 – 29	(0,50 puncte)
36 : (24 – a) = 6	(0,50 puncte)
24 – a = 36 : 6	(0,50 puncte)
24 – a = 6	(0,50 puncte)
a = 24 – 6	(0,50 puncte)
a = 18	(0,50 puncte) TOTAL:4 puncte

Aflăm valoarea lui **b** (2,50 puncte)

b : [(921 – 639) : 6 – 39] = 9	
b : (282 : 6 – 39) = 9	(0,50 puncte)
b : (47 – 39) = 9	(0,50 puncte)
b : 8 = 9	(0,50 puncte)
b = 9 x 8	(0,50 puncte)
b = 72	(0,50 puncte) TOTAL:2,50 puncte

Arătăm că **a** este sfertul lui **b** (0,50 puncte)

72 : 4 = 18 (sfertul lui b)
18 = 18

TOTAL: 7 puncte

Subiectul II

1.Câte ziare şi reviste s-au vândut în total?
101 + 60 = 161 (1 punct)

2.Câte ziare şi reviste au mai rămas de vândut?
1505 – 161 = 1344 (1 punct)

3.Reprezentare grafică(nr.de ziare şi reviste) (0,50 puncte)

nr.ziare |_____|_____|
} 1344
nr.reviste |_____|

4.Numărul părților egale. (0,50 puncte)

2 + 1 = 3

5.Câte reviste au mai rămas de vândut? (1 punct)

1344 : 3 = 448

6.Câte ziare au mai rămas de vândut? (1 punct)

448 x 2 =896

7.Câte reviste erau la început la chioşc? (1 punct)

448 + 60 = 508

8.Câte ziare erau la început la chioşc? (1 punct)

896 + 101 = 997

TOTAL: 7 puncte R: 508 reviste; 997 ziare.

Subiectul III

1.Presupunem că elevii s-au îmbarcat câte 6,rămânând 4 elevi fără loc.(1 punct)

2.Aceşti 4 elevi şi încă alți 6,din barca ce trebuia să rămână liberă în varianta a doua,îi redistribuim în bărcile care erau ocupate cu câte 6 elevi,pentru a fi câte 8 elevi într-o barcă.

6 + 4 = 10 (2 puncte)

3.Câți elevi se mai urcă într-o barcă?

8 – 6 = 2 (1 punct)

4.În câte bărci mai putem adăuga câte 2 elevi din cei 10 ?

10 : 2 = 5 (1 punct)

5.Câte bărci erau?

5 + 1 = 6 (1 punct)

6.Câți elevi erau?

5 x 8 = 40 sau 6 x 6 + 4 = 40 (1 punct)

TOTAL: 7 puncte R: 6 bărci; 40 de elevi

Subiectul IV

1.Câți centimetri măsoară bagheta lui Harry după prima magie?

2 x 2 + 1 = 5 (1 punct)

2.După a doua magie

5 x 2 + 1 = 11 (1 punct)

3.După a treia magie

11 x 2 + 1 = 23 (1 punct)

4.După a patra magie

23 x 2 + 1 = 47 (1 punct)

5.Dupa a cincea magie

47 x 2 + 1 = 95 (1 punct)

6.După a şasea magie

95 x 2 + 1 = 191 (1 punct)

7.Observăm că 191 > 160. Deci,6 este cel mai mic număr de magii făcute de Harry.
(1 punct)

TOTAL: 7 puncte R: 6 magii

Notă: Orice variantă de rezolvare care respectă rigorile matematicii se ia în calcul.

OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA
MATEMATICĂ - ETAPA JUDEŢEANĂ
17 MARTIE 2018

Clasa a V-a
Barem orientativ de corectare şi notare

Problema 1.

Să se afle numărul x astfel încât $[2^{48}:2^{44}-2^{66}:(2^9)^7]:(3^2-x)=1$

Soluţie.

$[2^4-2^{66}:2^{63}]:(3^2-x)=1$ .... 2 p

$[2^4-2^3]:(9-x)=1$ .... 2 p

$8:(9-x)=1 \Rightarrow 9-x=8$ .... 2 p

de unde $x=1$ .... 1 p

Problema 2.

Raluca are o sumă de bani. Dacă ar mai primi de la tatăl său 90 lei, noua sumă ar fi cubul unui număr natural, iar dacă ar cheltui pentru cărţi 90 de lei, noua sumă ar fi pătratul aceluiaşi număr natural. Ce sumă are Raluca?

Soluţie.

Dacă notăm cu x suma Ralucăi, avem relaţiile:
$x+90=k^3$ şi $x-90=k^2$ unde k număr natural .... 2 p
Din cele două egalităţi obţinem :
$k^3-k^2=180$, apoi $k^2(k-1)=180$ .... 2 p
k^2 este un divizor pătrat perfect al lui 180 şi numărul k, care verifică relaţia, este 6 ..... 2 p
Suma Ralucăi este $x=90+36=126$ (lei) .... 1 p

Problema 3.

Determinaţi numerele naturale care împărţite la 17. dau câtul $\overline{ab}$ divizibil cu 13 şi restul 3a.

Soluţie

$n=17\cdot\overline{ab}+3a$, iar $3a<17$ .... 1 p
$a\neq 0$ şi $a\leq 5$ .... 1 p
Numere de două cifre divizibile cu 13 cu prima cifră mai mică sau egală cu 5 sunt: 13, 26, 39, 52. .... 1 p
Astfel obţinem numerele:
$n_1=17\cdot 13+3=224$ .... 1 p
$n_2=17\cdot 26+6=448$ .... 1 p
$n_3=17\cdot 39+9=672$ .... 1 p
$n_4=17\cdot 52+15=899$ .... 1 p

Problema 4.

Ana, Dora și Sabina s-au urcat pe gard, fiecare în alt colț al grădinii să urmărească găinile. Fiecare dintre ele a văzut câte o găină pe care celelalte două nu au văzut-o. Oricare două dintre ele au văzut câte o găină pe care a treia nu a observat-o. O găină, a fost văzută de toate cele trei fetițe. Dintre găinile pe care le-a văzut Sabina, două au fost moțate. Dintre găinile văzute de Ana, 3 erau moțate. Iar dintre cele văzute de Dora, 4 au fost moțate.

a) Câte găini au fost văzute în total?

b) Câte găini nu erau moțate?

Soluție

a) Trei găini au fost văzute, fiecare în parte, de câte o fetiță. . . . . 1 p

Trei găini au fost văzute, fiecare în parte de câte două dintre fetițe

O găină a fost văzută de toate trei. . . . . 1 p

Deci, în total au fost văzute 7 găini . . . . 1 p

b)Toate 4 găinile văzute de Dora au fost moțate:

una pe care a văzut-o doar ea,

una pe care a văzut-o împreună cu Ana,

una pe care a văzut-o împreună cu Sabina și cea pe care au văzut-o toate. . . . . .1 p

Dintre găinile văzute de Ana trei erau moțate:

una este cea văzută de toate fetele,

una împreună cu Dora și . . . încă una. . . . . .1 p

Cum Sabina a văzut două găini moțate:

una cu Dora și una văzută de toate fetele, înseamnă că

a treia găină văzută de Ana, a fost cea pe care a văzut-o singură. . . . . 1 p

Deci au fost văzute 5 găini moțate (4 de Dora și una de Ana singură).

Prin urmare sunt două găini nemoțate. . . . . 1 p

Notă:

- *Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracțiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.*

OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA
MATEMATICĂ - ETAPA JUDEȚEANĂ
17 MARTIE 2018

Clasa a VI-a
Barem de corectare și notare

Problema 1.

Să se afle un număr natural $\boldsymbol{n}$ pentru care fracția $\frac{5n+9}{7n+8}$ este reductibilă.

Soluție și barem:

Fracția este reductibilă $\Rightarrow$ există $d \geq 2$ *astfel ca* $d|(5n+9)$ și $d|(7n+8) \Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow d|[7(5n+9)-5(7n+8)] = 23 \Rightarrow d|23$ 1p

$d \geq 2$ *și* $d|23$ *prim* $\Rightarrow d = 23$ 1p

$M_{23}^{*} = \{23; 46; 69; 92; \dots\}$ și avem, pe rând 1p

$5n+9 = 23 \Rightarrow n = \frac{14}{5} \notin \mathbb{N}$ 1p

$5n+9 = 46 \Rightarrow n = \frac{37}{5} \notin \mathbb{N}$ 1p

$5n+9 = 69 \Rightarrow n = \frac{60}{5} = 12,$ *pentru care fracția* $\frac{5n+9}{7n+8} = \frac{^{(23}69}{92} = \frac{3}{4}$ 1p

Problema 2.

Calculați valoarea fracției $\frac{a}{b}$ unde

$$\boldsymbol{a} = 2018 - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{1010}{1011}\right)$$

și

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\left(2018 + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{1011}\right)$$

Soluție și barem:

$a = 2 \cdot 1009 - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{1010}{1011}\right) =$ 1p

$= \left(2 - \frac{2}{3}\right) + \left(2 - \frac{3}{4}\right) + \cdots + \left(2 - \frac{1010}{1011}\right) =$ 1p

$= \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \cdots + \frac{1012}{1011}$ 1p

$b = \frac{2018}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1011} =$ 1p

$= \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{1011}\right) =$ 1p

$= \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \cdots + \frac{1012}{1011}$ 1p

Deci $a = b$ *și atunci* $\frac{a}{b} = 1$ 1p

Problema 3.

Determinaţi numerele prime ***a, b, c*** ştiind că

$$\frac{a+c-1}{a}=\frac{4b}{5b-4}$$

Soluție și barem:

$\frac{4b}{5b-4}=\frac{a+c-1}{a}\geq\frac{a+2-1}{a}=\frac{a+1}{a}>1$ *2p*

$\frac{4b}{5b-4}>1\Rightarrow 5b-4<4b\Rightarrow b<4$ *1p*

$I.\,Dacă\ b=3\Rightarrow\frac{a+c-1}{a}=\frac{12}{11}\Rightarrow 11(a+c-1)=12a\Rightarrow$

$\Rightarrow a=11(c-1), a: prim\Rightarrow a=11\ şi\ c=2$ *2p*

$II.\,Dacă\ b=2\Rightarrow\frac{a+c-1}{a}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\Rightarrow 3(a+c-1)=4a\Rightarrow$

$\Rightarrow a=3(c-1), a: prim\Rightarrow a=3\ şi\ c=2$ *2p*

Problema 4.

Se consideră dreapta AB, $O\in[AB]$ și punctele M și N de aceeaşi parte a dreptei AB, astfel ca $m(\widehat{MON})=102°$.

Calculaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\widehat{AON}$ și $\widehat{MOB}$.

Soluție și barem:

Fie $[OD$ *bisectoarea unghiului* $\sphericalangle AON$ și $[OE$ *bisectoarea lui* $\sphericalangle MOB$. *1p*
Notând $m(\sphericalangle AOD)=m(\sphericalangle DON)=x$ și $m(\sphericalangle BOE)=m(\sphericalangle EOM)=y$ avem:

Cazul I: $\sphericalangle AOM$ și $\sphericalangle BON$ *au interioare disjuncte:* (*desen*) *1p*

$2x+2y=180°+m(\sphericalangle MON)=180°+102°=282°$, *deci* $x+y=282°:2=$ $=141°$ *1p*

Observăm că $m(\sphericalangle DOE)=180°-(x+y)=180°-141°=39°$ *1p*

Cazul II: $\sphericalangle AON$ și $\sphericalangle BOM$ *au interioare disjuncte:* (*desen*) *1p*

$2x+2y=180°-m(\sphericalangle MON)=180°-102°=78°$, *deci* $x+y=78°:2=39°$ *1p*

Observăm că $m(\sphericalangle DOE)=m(\sphericalangle MON)+(x+y)=102°+39°=141°$ *1p*

Notă:

- *Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracțiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.*

OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA
MATEMATICĂ - ETAPA JUDEȚEANĂ
17 MARTIE 2018

Clasa a- VII a
Barem de corectare și notare

Problema 1.

Aflați numărul natural n, $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$ astfel încât numărul :

$p = \sqrt{\sqrt{256} + \sqrt{\frac{3n+75}{2n-3}}}$ să fie număr natural.

Soluție și barem de corectare:

Dacă numărul $p = \sqrt{16 + \sqrt{\frac{3n+75}{2n-3}}}$ este natural atunci fractia $\frac{3n+75}{2n-3}$ este număr natural și pătrat perfect ....1 punct

Din $2n - 3 \mid 3n+75$ și $2n - 3 \mid 2n - 3$ obținem că $2n - 3 \mid 6n + 150$ și $2n - 3 \mid 6n - 9$ ....1 punct

De unde $2n - 3 \mid (6n+150) - (6n - 9) \Rightarrow 2n - 3 \mid 6n+150 - 6n+9$ adică $2n - 3 \mid 159$ ....1 punct

$2n - 3 \in \{1;3;53;159\}$ ne conduce la $n \in \{2;3;28;81\}$ .... 2 puncte

Atunci $\frac{3n+75}{2n-3} \in \{81;28;3;2\}$ și pătrat perfect este 81 ....1 punct

$p = \sqrt{16 + \sqrt{81}} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ este număr natural deci $n = 2$ ....1 punct

Problema 2.

a) Determinați cel mai mic număr de forma $\overline{abcd}$, în baza zece, dacă: $\frac{\overline{ab} - \overline{cd}}{\overline{ab} + \overline{cd}} = \frac{1}{19}$.

b) Arătați că numărul $A = \left(2018 - \frac{1009}{\sqrt{1+3+5+...+2017}}\right)^{2017} : 2017$ este pătrat perfect.

Soluție și barem de corectare:

a) $(\overline{ab} - \overline{cd}) \cdot 19 = \overline{ab} + \overline{cd} \Rightarrow 18\overline{ab} = 20\overline{cd}$ 1punct

$\Rightarrow 9\overline{ab} = 10\overline{cd} \Rightarrow 10 \mid \overline{ab}$ și $9 \mid \overline{cd}$ 1punct

$\Rightarrow \overline{ab} = 20, \overline{cd} = 18 \Rightarrow \overline{abcd} = 2018$ 1punct

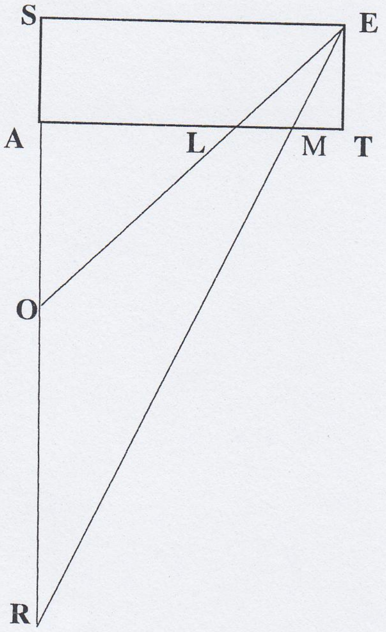
b) $1+3+7+...+2017=1009^2$ 2puncte

$\Rightarrow A=\left(2018-\dfrac{1009}{1009}\right)^{2017}:2017=2017^{2017}:2017=2017^{2016}=\left(2017^{1008}\right)^2$ 2puncte

Problema 3.

În dreptunghiul **SATE,** cu AT >TE , bisectoarea unghiului SET intersectează dreptele AT și SA în punctele **L** și respectiv **O**. Punctul M este mijlocul segmentului LT, iar dreapta EM intersectează dreapta SA în punctul **R**. Dacă TE = 2a cm și AO = b cm atunci aflați aria triunghiului RAM.

Soluție și barem de corectare:



Din (EL bisectoarea unghiului SET, obținem că m(∢ LET) = 45° și apoi m(∢ ELT) = = 90° – 45° = 45° de unde deducem că Δ LET este isoscel cu TE = LT = 2a cm ....1 punct

m(∢ALO) = m(∢ELT) = 45° (opuse la vârf) și apoi m(∢AOL) =90° – 45° = 45° de unde avem că Δ AOL este isoscel cu AO = AL = b cm ....1 punct

Deoarece ∢ RAM ≡ ∢ ETM (măsura de 90°) și ∢ AMR ≡ ∢ EMT (opuse la vârf) ⇒ Δ AMR ~ Δ TME ....1 punct

Ceea ce conduce la $\frac{\mathcal{A}_{MAR}}{\mathcal{A}_{MTE}}=\frac{AM^2}{TM^2}$ ....1 punct

$\frac{\mathcal{A}_{MAR}}{\frac{2a\cdot a}{2}}=\frac{(a+b)^2}{a^2}$ (TM = LM = 2a : 2 = a cm, deoarece [EM] este mediană)... ....2 puncte

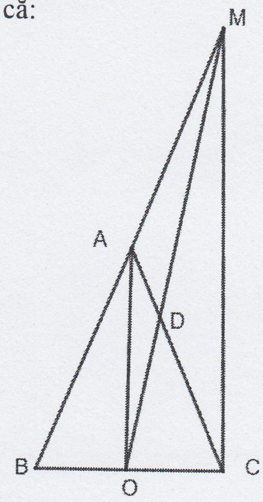
$\mathcal{A}_{MAR}=\frac{(a+b)^2}{a^2}\cdot\frac{2a^2}{2}$ și obținem $\mathcal{A}_{MAR}=(a+b)^2$ cm² ....1 punct

Problema 4.

Pe laturile triunghiului ABC, AB=AC se iau punctele $M \in AB$ astfel încât $[BA] \equiv [AM]$ și $D \in (AC)$ astfel încât $AC = 3AD$. Dacă $AO \perp BC, O \in BC$ arătați că:

a) ΔAOD și ΔCMD sunt asemenea.

b) Punctele O, M și D sunt coliniare.



Soluție și barem de corectare:

$\left.\begin{array}{l} AB = AM \\ AB = AC \end{array}\right\} \Rightarrow AC = \dfrac{BM}{2} \Rightarrow \Delta MCB$ este dreptunghic(reciproca teoremei medianei într-un triunghi dreptunghic) $\Rightarrow MC \perp BC$ 1punct

Dar $AO \perp BC \Rightarrow AO \parallel MC \Rightarrow \angle OAD \equiv \angle DCM$ (alterne interne) (1)................ 1punct

În Δ ABC, isoscel, din [AO] înălțime deci și mediană, obținem că punctul O este mijlocul segmentului BC de unde deducem că [AO] este linie mijlocie în Δ MBC și AO= MC:2 ….1 punct

Folosind (1) și faptul că

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{AO}{MC} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AOD \sim \Delta CMD$$ 2puncte

b) Din a) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle ADO \equiv \angle MDC \\ m(\angle ADO) + m(\angle ODC) = 180^o \end{array}\right\} \Rightarrow m(\angle MDC) + m(\angle ODC) = 180^o \Rightarrow$ O – D – M coliniare 2puncte

Notă:

- *Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracțiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.*

OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA
MATEMATICĂ - ETAPA JUDEȚEANĂ
17 MARTIE 2018

Clasa a VIII-a
Barem de corectare și notare

Problema 1.

Se consideră $a_n = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \cdots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$, unde n este un număr natural . Determinați numerele naturale $n \le 100$ pentru care a_n este număr rațional.

Soluție

$a_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \cdots + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$ (1p)

$a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (1p)

$a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (1p)

$n + 1 = k^2 \Rightarrow n = k^2 - 1,\ \ k \in \mathbb{N}^*$ (1p)

$n \le 100 \Rightarrow k^2 - 1 \le 100 \Rightarrow k^2 \le 101 \Rightarrow k \in \{1,2,3,\ldots,10\}$. (1p)

$n \in \{0,3,15,24,35,48,63,80,99\}$ (1p)

(2p)

Problema 2.

Se dă expresia E(x) = $\left(\frac{x+3}{x^3+4x^2+4x}\cdot\frac{x^2+2x}{x-2}-\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right):\frac{x-3}{2-3x-2x^2}$.

a) Aduceţi E(x) la forma cea mai simplă.
b) Determinaţi mulţimea valorilor întregi ale lui x pentru care E(x) este natural.
c) Determinaţi mulţimea A={$x \in$ R / E(x) < 2}.

Soluție

a) E(x) = $\left(\frac{x+3}{x(x+2)^2}\cdot\frac{x(x+2)}{x-2}-\frac{1}{2+x}-\frac{1}{x-2}\right):\frac{x-3}{2+x-4x-2x^2} =$

$= \frac{x+3-x+2-x-2}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{(2+x)-2x(2+x)}{x-3} =$ (2p)

$= \frac{3-x}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{(x+2)(1-2x)}{x-3} = \frac{2x-1}{x-2}$. (1p)

b) E(x) are sens pentru $x \in \Re \setminus \left\{-2;0;\frac{1}{2};2;3\right\}$. (1)

$E(x) \in Z \Rightarrow (x-2) | (2x-1) \Rightarrow (x-2) | [(2x-1)-2(x-2)] \Leftrightarrow$ (1p)

$(x-2)/3 \Leftrightarrow x-2 \in \{\pm1,\pm3\} \overset{(1)}{\Rightarrow} x \in \{-1,1,5\}$.

$E(-1) = 1 \in N;\ E(1) = -1 \notin N;\ E(5) = 3 \in N$, deci $x \in \{-1,5\}$. (1p)

c) $E(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-2} < 2,\ x \in \Re \setminus \left\{-2;0;\frac{1}{2};2;3\right\}$

$\frac{2x-1}{x-2} < 2 \Leftrightarrow \frac{2x-1-2x+4}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} < 0 \Leftrightarrow$ (1p)

$\Leftrightarrow x < 2 \Rightarrow$ A= $(-\infty,2) \setminus \{-2,0,\frac{1}{2}\}$. (1p)

Problema 3.

Se dă un pătrat având latura egală cu diagonala unui paralelipiped dreptunghic. Aria pătratului este de două ori mai mică decât aria totală a paralelipipedului dreptunghic. Aflați dimensiunile paralelipipedului știind că volumul său este de $64\ dm^3$

Soluție

Fie a, b, c dimensiunile paralelipipedului dreptunghic, d latura pătratului și diagonala paralelipipedului dreptunghic

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ iar $\mathcal{A}_t = 2 \cdot (ab + ac + bc)$ (1p) (1p)

Avem:

$2 \cdot d^2 = 2 \cdot (ab + ac + bc) \Longrightarrow d^2 = ab + ac + bc \Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ (1p)

$2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 = 2ab + 2ac + 2bc \Longrightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$
(1p)

$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0 \Longrightarrow a = b = c$ (2p)

Dacă $\mathcal{V}_{p.d.} = 64\ dm^3$ atunci $a^3 = 64 \Longrightarrow a = 4\ dm$ (1p)

Deci, paralelipipedul este cub și are muchia de $4\ dm$.

Problema 4.

Pe planul triunghiului ABC **cu laturile** $AB = 2\ cm,\ BC = \sqrt{3}\ cm$ **și** $AC = 1\ cm,$ **se ridică perpendiculara** $AM = \sqrt{2}\ cm$.

a) Arătați că MC **și** BC **sunt perpendiculare.**

b) Aflați măsura unghiului dintre MC și (AMB).

Soluție

a) $MA \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC)$

$\Rightarrow MA \perp AC \Rightarrow \Delta MAC$ *este dreptunghic în* $A \overset{T.P.}{\Longrightarrow} MC^2 = MA^2 + AC^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$

$\Rightarrow MC = \sqrt{3}$ *cm.* (1p)

$MB = \sqrt{6}$ (1p)

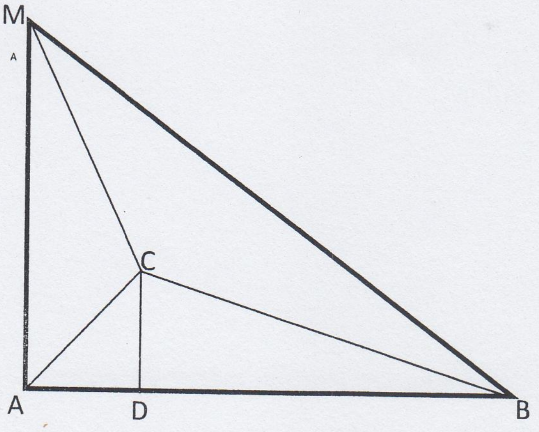
Cu Reciproca Teoremei lui Pitagora în ΔMBC avem $m(\sphericalangle MCB) = 90^\circ$ (1p)

b) $MA \perp (ABC),\ CD \subset (ABC) \Rightarrow MA \perp CD$ (1p)

$CD \perp AB, CD \perp MA, AM \cap AB = \{A\} \Rightarrow CD \perp (MAB)$ (1p)

$m[\sphericalangle(MC,\ (AMB))] = m(\sphericalangle MC, MD) = m(\sphericalangle CMD) = \alpha$ (1p)

În $\Delta CMD, m(\sphericalangle CDM) = 90^\circ, \sin\alpha = \frac{CD}{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$, deci $\alpha = 30^\circ$ (1p)



Notă:

- *Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.*
- *Nu se acordă fracțiuni de punct.*
- *Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.*

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro