OJM 2018, clasa a VII-a.
O soluţie scurtă, naturală şi o generalizare la problema 4.

de Silviu Boga, profesor, Iaşi

Fie triunghiul ABC cu $m\left(\widehat{A}\right)=80^0$ şi $m\left(\widehat{C}\right)=30^0$. Considerăm punctul M interior triunghiului ABC astfel încât $m\left(\widehat{MAC}\right)=60^0$ şi $m\left(\widehat{MCA}\right)=20^0$. Dacă N este intersecţia dreptelor BM şi AC, să se arate că $(MN$ este bisectoare a unghiului $\widehat{AMC}$.

SOLUŢIE

Cum $m\left(\widehat{C}\right)=30^0$, considerând cercul $C(O;r)$ circumscris triunghiului ABC $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle AOB)=60^0$, deci triunghiul AOB este echilateral şi totodată triunghiurile OBC şi OAC sunt isoscele, cu $m\left(\widehat{OAC}\right)=m\left(\widehat{OCA}\right)=20^0$ şi $m\left(\widehat{OCB}\right)=m\left(\widehat{OBC}\right)=10^0$. Considerând M' punctul în care bisectoarea unghiului $\widehat{ABO}$ intersectează dreapta CO, se dovedeşte imediat $M'\equiv M$. Într-adevăr, deoarece $m\left(\widehat{BOM'}\right)=20^0=m\left(\widehat{BAM'}\right)$ $\Rightarrow$ $m\left(\widehat{M'AC}\right)=60^0$ şi având $m\left(\widehat{M'CA}\right)=20^0$, se justifică $M'\equiv M$ şi coliniaritatea punctelor B, M, N este imediată.

GENERALIZARE: În enunţul problemei efectuăm modificările $m\left(\widehat{A}\right)=(60+x)^0$, cu $x\in(0;30)$, $m\left(\widehat{MAC}\right)=3x^0$, $m\left(\widehat{MCA}\right)=x^0$, restul enunţului rămânând nemodificat. Rezolvarea urmează în mod identic aceiaşi paşi iar în cazul $x=20$ avem problema iniţială.