OJM 2018

Enunțuri și soluții

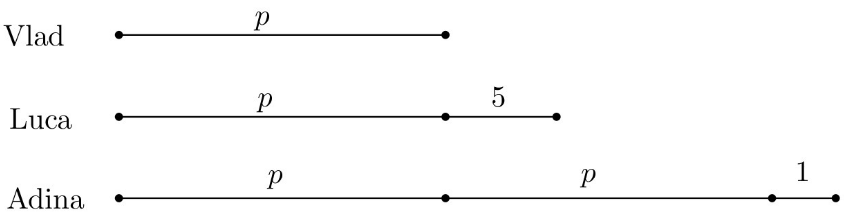
Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a V-a, varianta 2

Problema 1. Vlad, Luca şi Adina au cumpărat de la o librărie rechizite în valoare totală de 118 lei. Vlad a cumpărat 5 pixuri, 4 caiete şi 3 cutii cu creioane colorate, Luca a cumpărat 7 pixuri, 3 caiete şi 4 cutii cu creioane colorate, iar Adina a cumpărat 8 pixuri, 7 caiete şi 7 cutii cu creioane colorate.

Ştiind că Luca a plătit cu 5 lei mai mult decât Vlad, iar Adina cu 4 lei mai puţin decât Vlad şi Luca la un loc, aflaţi cât costă un creion, cât costă un caiet şi cât costă o cutie cu creioane colorate.

Soluţie. Folosim metoda grafică pentru a afla sumele plătite de fiecare copil. În reprezentarea de mai jos, p este suma plătită de Vlad:



.... **1p**

$p+p+5+2p+1=118$, de unde $p=28$, deci Vlad a plătit 28 de lei, Luca a plătit 33 de lei, iar Adina 57 de lei **2p**

Folosim metoda comparaţiei pentru a afla preţul fiecărui tip de rechizite:

5 pixuri .... 4 caiete .... 3 cutii cu creioane .... 28 lei
7 pixuri .... 3 caiete .... 4 cutii cu creioane .... 33 lei
8 pixuri .... 7 caiete .... 7 cutii cu creioane .... 57 lei

Adunând primele două relaţii obţinem

12 pixuri .... 7 caiete .... 7 cutii cu creioane .... 61 lei

.... **1p**

Comparând cu a treia relaţie şi efectuând diferenţa, obţinem că 4 pixuri costă 4 lei, deci un pix costă 1 leu **1p**

Înlocuind în primele două relaţii, obţinem:

4 caiete .... 3 cutii cu creioane .... 23 lei
3 caiete .... 4 cutii cu creioane .... 26 lei

Pentru a aduce la acelaşi termen de comparaţie, vom egala numărul de caiete, înmulţind cu 3 prima relaţie şi cu 4 pe cea de-a doua:

12 caiete .... 9 cutii cu creioane .... 69 lei
12 caiete .... 16 cutii cu creioane .... 104 lei

Obţinem că 7 cutii cu creioane costă 35 de lei, deci o cutie cu creioane costă 5 lei **1p**

Înlocuind într-una dintre relaţii, obţinem că un caiet costă 2 lei **1p**

Problema 2. Suma a 15 numere naturale consecutive este un număr cu cifre diferite, printre care se află cifrele 0, 1, 2 şi 4. Care este cel mai mic număr posibil dintre cele 15 numere?

Soluţie. Dacă n este cel mai mic număr căutat, atunci cele 15 numere consecutive din enunţ sunt n, $n+1$, ..., $n+14$, a căror sumă S este egală cu $15n+105$, adică $S = 3 \cdot 5 \cdot (n+7)$ **3p**

Întrucât suma S este divizibilă cu 3, suma cifrelor lui S este, la rândul ei, divizibilă cu 3. Cum 0, 1, 2 şi 4 sunt cifre ale lui S, iar $0+1+2+4=7$ nu se divide cu 3, rezultă că S mai are cel puţin încă o cifră, diferită de 0, 1, 2 şi 4. Condiţiile de minim şi de divizibilitate cu 3 conduc la faptul că S mai are o singură altă cifră, egală cu 5 .... **2p**

Cel mai mic număr de forma $15\,(n+7)$ care se scrie cu cifrele 0, 1, 2, 4 şi 5 este 10 245, pentru care se obţine $n = 676$ **2p**

Problema 3. Determinaţi numerele de forma $\overline{abcd}$ care îndeplinesc simultan următoarele condiţii:
a) suma pătratelor cifrelor este divizibilă cu 4;
b) restul împărţirii numărului $\overline{abcd}$ la c este 7.

Soluţie. Pătratul unui număr natural este de forma $4k$ sau $4k+1$ **1p**

$a^2+b^2+c^2+d^2$ este divizibil cu 4 dacă a, b, c, d au aceeaşi paritate **1p**

Din teorema împărţirii cu rest există numerele naturale q şi r astfel încât $\overline{abcd} = c \cdot q + 7$ şi $7 < c$, deci $c = 8$ sau $c = 9$ **1p**

Dacă $c = 8$, toate cifrele sunt pare şi $\overline{abcd} = 8q+7$, imposibil, deoarece membrul stâng este par, iar membrul drept este impar **1p**

Dacă $c = 9$, toate cifrele sunt impare şi, cum $\overline{ab9d}$ dă restul 7 la împărţirea cu 9, rezultă că $a+b+d+9$ este un număr par care dă restul 7 la împărţirea cu 9; se obţine că $a+b+d$ poate fi 7 sau 25 .... **1p**

Pentru $a+b+d=7$ se obţin soluţiile 1393, 3193, 3391, 1195, 1591 şi 5191 .... **1p**

Pentru $a+b+d=25$ se obţin soluţiile 7999, 9799 şi 9997 .... **1p**

Problema 4. Într-o cutie se află 50 de cartonaşe pe care sunt scrise primele 100 de numere naturale nenule, astfel: pe primul cartonaş sunt scrise numerele 1 (pe o parte) şi 2 (pe cealaltă parte), pe al doilea cartonaş sunt scrise numerele 3 (pe o parte) şi 4 (pe cealaltă parte) şi aşa mai departe, până la al 50-lea cartonaş, pe care sunt scrise numerele 99 (pe o parte) şi 100 (pe cealaltă parte).

Eliza scoate patru cartonaşe din cutie şi calculează suma celor opt numere scrise pe ele. Câte sume distincte poate obţine Eliza?

Soluţie. Sumele celor două numere de pe fiecare cartonaş sunt: 3, 7, 11, 15, ..., 195, 199, adică numerele de forma $4k-1$, unde k este un număr natural care ia valori între 1 şi 50 .... **2p**

Dacă $4a-1$, $4b-1$, $4c-1$ şi $4d-1$ sunt sumele de pe cele 4 cartonaşe, suma totală este $4(a+b+c+d)-4$, deci problema se reduce la a calcula numărul de valori pe care le poate lua suma a patru numere naturale nenule $a<b<c<d$, cuprinse între 1 şi 50.

Suma minimă este $1+2+3+4=10$, iar suma maximă este $47+48+49+50=194$ **1p**

Vom arăta că fiecare sumă $a+b+c+d$ poate lua toate valorile de la 10 la 194, adică în total 185 de valori. Astfel avem:

• sumele de la 10 la 56 se obţin pentru $a=1$, $b=2$, $c=3$ şi d luând valori de la 4 la 50: $1+2+3+4$, $1+2+3+5$, $1+2+3+6$, ..., $1+2+3+50$

• sumele de la 57 la 102 se obţin pentru $a=1$, $b=2$, $d=50$ şi c luând valori de la 4 la 49: $1+2+4+50$, $1+2+5+50$, $1+2+6+50$, ..., $1+2+49+50$

- sumele de la 103 la 148 se obţin pentru $a = 1$, $c = 49$, $d = 50$ şi b luând valori de la 3 la 48: $1 + 3 + 49 + 50$, $1 + 4 + 49 + 50$, $1 + 5 + 49 + 50$, ..., $1 + 48 + 49 + 50$
- sumele de la 149 la 194 se obţin pentru $b = 48$, $c = 49$, $d = 50$ şi a luând valori de la 2 la 47: $2 + 48 + 49 + 50$, $3 + 48 + 49 + 50$, $4 + 48 + 49 + 50$, ..., $47 + 48 + 49 + 50$

În concluzie, Eliza poate obţine 185 de sume diferite, şi anume toate numerele cuprinse între $4 \cdot 10 - 4 = 36$ şi $4 \cdot 194 - 4 = 772$, numărate din 4 în 4 .... **4p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018
CLASA a VI-a
Varianta 2

Soluţii şi baremuri orientative

Problema 1. Numerele naturale x, y, z satisfac egalitatea

$$13x + 8y = 5z.$$

Demonstraţi că numărul $(x + y)(y + z)(z + x)$ este divizibil cu 130.

Soluţie şi barem: Din egalitatea $13x + 8y = 5z$, obţinem $13x + 13y = 5z + 5y$, adică $13(x + y) = 5(z + y)$. Deoarece numerele 13 şi 5 sunt prime, obţinem că $(x + y) \vdots 5$ şi $(y + z) \vdots 13$. **4p**

Din ipoteză, obţinem $18x + 8y = 5z + 5x$, adică $5(z + x) \vdots 2$, de unde $(z + x) \vdots 2$. .. **2p**

Deoarece $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$, rezultă concluzia. **1p**

Problema 2. Un tablou de formă pătrată se împarte în 100 pătrăţele identice, distribuite pe 10 linii şi 10 coloane. Avem la dispoziţie 10 cartonaşe, numerotate diferit, cu cifre de la 0 la 9. Pe tablou trebuie să aşezăm două cartonaşe, având suma 10, în pătrăţele situate pe linii şi coloane diferite. Determinaţi numărul de posibilităţi de aşezare a acestor cartonaşe.

Soluţie şi barem: Deoarece suma cifrelor trebuie să fie egală cu 10, există doar 4 perechi de cartonaşe care se pot plasa pe tablou. **1p**

Primul cartonaş se poate plasa în orice pătrăţel, deci există 100 variante. Pentru al doilea cartonaş mai rămân 9 linii şi 9 coloane la dispoziţie, adică 81 de variante. Prin urmare avem $100 \times 81 = 8100$ variante de plasare a unei perechi de cartonaşe. **4p**

Deoarece avem 4 perechi, atunci avem în total $4 \times 8100 = 32400$ variante. **2p**

Problema 3. În triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $AB < AC$, AD este înălţime, iar AE este bisectoare, unde $D, E \in (BC)$. În triunghiul ascuţitunghic $A'B'C'$, cu $A'B' < A'C'$, $A'D'$ este înălţime, iar $A'E'$ este bisectoare, unde $D', E' \in (B'C')$. Se ştie că $[AB] \equiv [A'B']$, $[AD] \equiv [A'D']$ şi $[AE] \equiv [A'E']$. Demonstraţi că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt congruente.

Soluţie şi barem: Deoarece $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'D'$, conform cazului $C.I.$, obţinem $\measuredangle B \equiv \measuredangle B'$ $(*)$ şi $\measuredangle BAD \equiv \measuredangle B'A'D'$. **3p**

Pe de altă parte, $\triangle DAE \equiv \triangle D'A'E'\ (C.I.)$, de unde $\measuredangle DAE \equiv \measuredangle D'A'E'$. **1p**

Suntem conduşi la $\measuredangle BAE \equiv \measuredangle B'A'E'$, de unde obţinem $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$. **2p**

Ţinând cont de $(*)$, rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, conform cazului $U.L.U.$ **1p**

Problema 4. Lucia are în total 2018 bile galbene, albastre şi verzi. Numărul bilelor verzi este de 4 ori mai mare decât numărul bilelor albastre. La un *schimb*, Lucia oferă prietenei sale Cristina 13 bile galbene şi primeşte 5 bile albastre şi 7 bile verzi. După mai multe astfel de schimburi, Lucia rămâne fără bile galbene, dar cu 1271 bile verzi. Determinaţi numărul de bile galbene avute iniţial de Lucia?

Soluţie şi barem: Notăm cu k numărul de schimburi efectuate între cele două prietene. Atunci numărul de bile galbene este $13k$. **1p**

Numărul iniţial de bile albastre este $\frac{2018-13k}{5}$, iar numărul iniţial de bile verzi este $\frac{4(2018-13k)}{5}$. **2p**

Numărul final de bile verzi este $\frac{4(2018-13k)}{5}+7k=1271$,
de unde se obţine $k=101$. **3p**

Obţinem că Lucia a avut iniţial 1313 bile galbene. **1p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE-CLASA a 7-a
Varianta 2

Problema 1. Arătaţi că oricare ar fi numărul natural nenul n, numărul $\sqrt{n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]}$ este iraţional.

(Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a.)

Gazeta Matematică

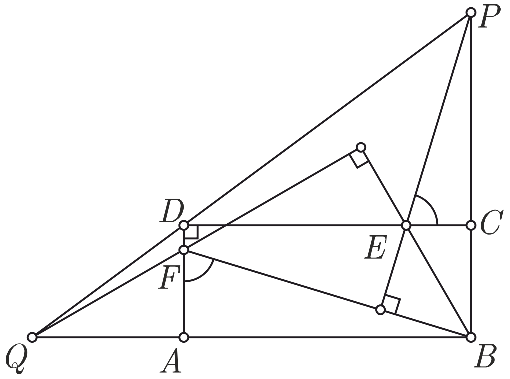
Soluţie. $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=k$, k număr natural, $k\le\sqrt{n}+\frac{1}{2}<k+1$ .... 2 puncte
$k-\frac{1}{2}>0$ .... 1 punct
$(k-\frac{1}{2})^2\le n<(k+\frac{1}{2})^2$ .... 1 punct
$k^2+\frac{1}{4}\le n+k<k^2+2k+\frac{1}{4}$ .... 1 punct
$k^2<n+[\sqrt{n}+\frac{1}{2}]<(k+1)^2$ .... 1 punct
numărul din enunţ este iraţional .... 1 punct

Problema 2. Determinaţi perechile de numere întregi (a,b) care au proprietatea că a^2+2b^2+2a+1 este divizor al lui $2ab$.

Soluţie. $(0,b)$ şi $(a,0)$ sunt soluţii pentru orice a,b întregi .... 1 punct
(a,b) este soluţie dacă şi numai dacă $(a,-b)$ este soluţie,
reducere la cazul $ab>0$ .... 1 punct
$a^2+2b^2+2a+1\le 2ab$ .... 1 punct
$(a-2b)^2+(a+2)^2\le 2$ .... 1 punct
$|a+2|\le\sqrt{2}, |a-2b|\le\sqrt{2}, a\in\{-3,-2,-1\}$,
$(a,b)\in\{(-3,-2);(-3,-1);(-1,-1)\}$ (după verificări) .... 2 puncte
$S_1=\{(-3,-2);(-3,-1);(-1,-1);(-3,2);(-3,1);(-1,1)\}$,
$S_2=\{(a,0)|a\in\mathbb{Z}\}\cup\{(0,b)|b\in\mathbb{Z}\}$, $S=S_1\cup S_2$ .... 1 punct

Problema 3. Fie dreptunghiul $ABCD$ şi punctele arbitrare $E\in(CD)$ şi $F\in(AD)$. Perpendiculara din punctul E pe dreapta FB intersectează dreapta BC în punctul P şi perpendiculara din punctul F pe dreapta EB intersectează dreapta AB în punctul Q. Să se arate că punctele P, D şi Q sunt coliniare.

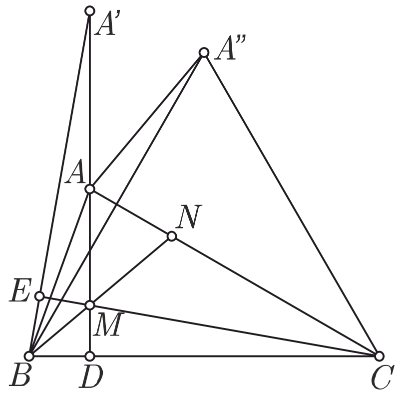
Soluţie.



$\widehat{FQA}\equiv\widehat{EBC}$ (au acelaşi complement, $\widehat{EBQ}$) . 1 punct
$\triangle EBC\sim\triangle FQA$ (U.U.), $\frac{EC}{FA}=\frac{BC}{QA}$ .... 1 punct
$\widehat{PEC}\equiv\widehat{BFA}$ (au acelaşi complement, $\widehat{ABF}$)..1 punct
$\triangle PEC\sim\triangle BFA$ (U.U.), $\frac{PC}{AB}=\frac{EC}{FA}$ .... 1 punct
$DC=AB, AD=BC, \frac{PC}{AB}=\frac{EC}{FA}=\frac{BC}{QA}$ .... 1 punct
$\triangle PCD\sim\triangle DAQ$ (L.U.L.)($m(\widehat{PCD})=m(\widehat{DAQ})=90^\circ, \frac{PC}{DA}=\frac{DC}{QA}$) .... 1 punct
$m(\widehat{PDQ})=m(\widehat{PDC})+90^\circ+m(\widehat{ADQ})=180^\circ$,
$m(\widehat{ADQ})=m(\widehat{CPD})$, P,D,Q coliniare........1 punct

Problema 4. Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 80°$ şi $m(\widehat{C}) = 30°$. Considerăm punctul M interior triunghiului ABC astfel încât $m(\widehat{MAC}) = 60°$ şi $m(\widehat{MCA}) = 20°$. Dacă N este intersecţia dreptelor BM şi AC să se arate că $(MN$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$.

Soluţie.



$AM \cap BC = \{D\}, AD \perp BC, BE \perp CM, M \in (EC), BE \cap AM = \{A'\}$,

$\triangle BAA'$ isoscel $(m(\widehat{ABA'}) = m(\widehat{AA'B}) = 10°)$ .... 1 punct

Fie A'' cu $\triangle BCA''$ echilateral, CA bisectoarea unghiului $\widehat{BCA''}$ .... 2 puncte

CA mediatoarea lui $[BA'']$, A egal depărtat de B şi A'',

$\triangle BAA''$ isoscel $(m(\widehat{ABA''}) = m(\widehat{AA''B}) = 10°)$ .... 2 puncte

$\triangle BAA' \equiv \triangle BAA''$ (U.L.U), $BA' = BA''$ .... 1 punct

$\triangle BDA' \equiv \triangle BEC$ (I.U.), $BD = BE$,

B se află pe bisectoarea lui $m(\widehat{AMC})$ .... 1 punct

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a VIII-a - Soluţii şi barem

Varianta 2

Problema 1. Arătaţi că, dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{n}{m}\right\} \neq 1.$$

Gazeta Matematică

Soluţie. Presupunând prin absurd că există $m, n \in \mathbb{N}^*$, astfel ca $\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{n}{m}\right\} = 1$ reiese $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} - \left[\frac{m}{n}\right] - \left[\frac{n}{m}\right] \in \mathbb{N}$, deci $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$ şi, simplificând fracţiile, putem presupune $(m, n) = 1$ **1p**

Dacă $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = k \in \mathbb{N}$, atunci $n^2 - knm + m^2 = 0$ **1p**

Din relaţia precedentă rezultă că $m \mid n^2$ şi $n \mid m^2$, ceea ce, ţinând cont de $(m, n) = 1$, implică $m = n = 1$. Dar, pentru $m = n = 1$ expresia din enunţ este egală cu 0, deci am obţinut o contradiţie **5p**

Problema 2. Fie $a, b, c \in [1, \infty)$. Demonstraţi că

$$\frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a} + \frac{3}{2} \leq a + b + c.$$

Soluţie. Din inegalitatea mediilor avem $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ şi analoagele, de unde rezultă $\frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a} + \frac{3}{2} \leq \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2} + \frac{3}{2}$ **3p**

Vom arăta că $\sqrt{a} \leq 2a - 1$ pentru orice $a \geq 1$. Într-adevăr, relaţia precedentă este echivalentă cu $(2\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} - 1) \geq 0$, relaţie evidentă pentru orice $a \geq 1$ **2p**

Din inegalitatea de mai sus şi analoagele ei obţinem că $\frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2} + \frac{3}{2} \leq a + b + c$ **2p**

Problema 3. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Notăm cu M, N şi P mijloacele muchiilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[BB']$. Fie $\{O\} = A'N \cap C'M$.

a) Arătaţi că punctele D, O, P sunt coliniare.

b) Arătaţi că $MC' \perp (A'PN)$ dacă şi numai dacă $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

a) $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul BAC, deci $MN \parallel AC$ şi $MN = \frac{1}{2}AC$. Cum $AC \parallel A'C'$ şi $AC = A'C'$, rezultă că $MNC'A'$ este trapez şi că $\frac{MO}{OC'} = \frac{NO}{OA'} = \frac{1}{2}$. Dacă notăm $\{O'\} = DP \cap MC'$, analog se arată că $MPDC'$ este trapez şi $\frac{MO'}{O'C'} = \frac{MP}{DC'} = \frac{1}{2}$. Rezultă că punctele O şi O' împart segmentul $[MC']$ în raport $1/2$, deci coincid. Aşadar punctele D, O, P sunt coliniare. **2p**

b) Notăm $AB = 2x, BC = 2y, BB' = 2z$. $C'M \perp (A'PN) \Leftrightarrow C'M \perp A'N$ şi $C'M \perp DP$. Aplicăm succesiv teorema lui Pitagora. În $\triangle C'BC$, $\triangle C'BM$, $\triangle A'BA$,

$\triangle A'BN$, $\triangle DBA$, $\triangle DBP$, $\triangle BMN$, $\triangle DAM$ obţinem $OM^2 = \frac{1}{9}C'M^2 = \frac{1}{9}(4z^2+4y^2+x^2)$, $ON^2 = \frac{1}{9}A'N^2 = \frac{1}{9}(4z^2+4x^2+y^2)$, $OD^2 = \frac{4}{9}DP^2 = \frac{4}{9}(4y^2+4x^2+z^2)$, $MN^2 = x^2+y^2$, $DM^2 = 4y^2+x^2$. Din $C'M \perp A'N$ rezultă că $\triangle MNO$ este dreptunghic în O şi, prin aplicarea teoremei lui Pitagora, $MN^2 = MO^2 + ON^2$ ceea ce conduce la $x^2+y^2 = 2z^2$ (*). La fel, din $C'M \perp DP$, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul MDO avem $DM^2 = DO^2 + OM^2$, ceea ce ne conduce la relaţia $x^2+z^2 = 2y^2$ (**). Din (*) şi (**) rezultă $x = y = z$, de unde rezultă că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Problema 4. a) Considerăm numerele naturale nenule a, b, c astfel încât $a < b < c$ şi $a^2 + b^2 = c^2$. Demonstraţi că dacă $a_1 = a^2$, $a_2 = ab$, $a_3 = bc$, $a_4 = c^2$, atunci $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_4^2$ şi $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.

b) Demonstraţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, există numerele naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ care verifică relaţiile $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ şi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n$.

Soluţie. a) Avem $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^4 + a^2b^2 + b^2c^2 = a^2(a^2+b^2) + b^2c^2 = a^2c^2 + b^2c^2 = (a^2+b^2)c^2 = c^4$ **1p**

Apoi $a_1 = a^2 < ab = a_2$ (deoarece $a < b$), $a_2 = ab < bc = a_3$ (deoarece $a < c$) şi $a_3 = bc < c^2 = a_4$ (deoarece $b < c$), aşadar $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. **1p**

b) Pentru $n = 3$, un exemplu este $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$ ($3 < 4 < 5$ şi $3^2 + 4^2 = 5^2$).

Pentru $n \geq 4$ putem alege $a_1 = 7$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$, ..., $a_{n-2} = 2n$. Evident, suma $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-2}^2$ este impară. Fie $N \in \mathbb{N}$ astfel ca $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-2}^2 = 2N+1$. Atunci $N \geq 3$. Definim atunci $a_{n-1} = N$ şi $a_n = N+1$.

Avem $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 = 2N + 1 + N^2 = (N+1)^2 = a_n^2$ şi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} < a_n$. Toate inegalităţile sunt evidente în afară de penultima: $a_{n-2} \leq \sqrt{2N+1} < N = a_{n-1}$ revine la $N^2 > 2N+1$, adică la $(N-1)^2 > 2$, evident adevărat pentru $N \geq 3$ **5p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a 9-a, SOLUŢII ŞI BAREME

Varianta 2

Problema 1. Determinaţi funcţiile strict crescătoare $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x+y)}$ este un număr natural nenul, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$.

Gazeta Matematică

Soluţie. Luând $x = y = 0$ rezultă $\dfrac{2f(0)}{1+f(0)} \in \mathbb{N}^*$, deci $f(0) \neq 0$. Dar $f(0)$ şi $1 + f(0)$ sunt relative prime, deci $1 + f(0)$ divide pe 2, adică $f(0) = 1$ **1p**

Să arătăm că $\dfrac{f(x)+f(1)}{1+f(x+1)} = 1$ pentru orice $x \geq 1$ (*) **1p**

Într-adevăr, în caz contrar am avea $\dfrac{f(x)+f(1)}{1+f(x+1)} \geq 2$ pentru un anumit $x \in \mathbb{N}^*$ şi atunci $f(x) + f(1) \geq 2 + 2f(x+1) \geq 2 + 2(f(x)+1)$, de unde $f(x) \leq f(1) - 4$, în contradicţie cu monotonia lui f **2p**

Din (*) rezultă $f(x+1) = f(x) + f(1) - 1$ pentru orice $x \geq 1$, de unde obţinem $f(n) = nf(1) - n + 1, \forall n, \in \mathbb{N}^*$, relaţie care este valabilă şi pentru $n = 0$ **2p**

Obţinem astfel funcţiile de forma $f(n) = an + 1$, unde $a = f(1) - 1 \in \mathbb{N}^*$, care verifică proprietăţile din enunţ **1p**

Problema 2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $m(\angle A) = 90°$ şi punctele D şi E pe cateta (AB) astfel încât $\angle ACD \equiv \angle DCE \equiv \angle ECB$. Arătaţi că dacă $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DE}$ şi $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CM}$ atunci $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AM}$.

Soluţie. Relaţia $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CM}$ arată că M este mijlocul segmentului $[DE]$. Cum $M \in (AB)$, trebuie să demonstrăm că $AB = 4AM$ **1p**

Alegând convenabil unitatea de măsură, fie $AD = 2, DE = 3$ şi $AC = 2x$. Cu teorema bisectoarei în triunghiul ACE, obţinem $CE = 3x$. Folosind teorema lui Pitagora în triunghiurile ACE, apoi ACD, găsim $x = \sqrt{5}$ şi $CD = 2\sqrt{6}$ **2p**

Folosind teorema bisectoarei în triunghiul CDB şi teorema lui Pitagora în triunghiul ABC, avem că $\frac{3}{BE} = \frac{2\sqrt{6}}{BC}$, respectiv $BC^2 = (5+BE)^2 + (2\sqrt{5})^2$. Înlocuind $BC = \frac{2\sqrt{6}}{3}BE$ în cea de-a doua relaţie, obţinem că $BE = 9$ **3p**

Deducem că $AB = 14, AM = AD + \frac{1}{2}DE = \frac{7}{2}$, prin urmare $AB = 4AM$ **1p**

Problema 3. Fie AD, BE, CF înălţimile triunghiului ABC şi K, L, M ortocentrele triunghiurilor AEF, BFD, respectiv CDE. Notăm cu G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor DEF, respectiv KLM. Să se arate că $HG_1 = G_1G_2$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC.

Soluţie. Cum $FK \perp AC$ (FK este înălţime în triunghiul AEF) şi $BE \perp AC$ (BE este înălţime în triunghiul ABC), $FK \parallel HE$ (1)

Analog, $EK \perp AB$ (EK este înălţime în triunghiul AEF) şi $CF \perp AB$ (CF este înălţime în triunghiul ABC), deci $EK \parallel HF$ (2) **3p**

Din (1) şi (2) $FHEK$ este paralelogram, deci $\overrightarrow{r_F} + \overrightarrow{r_E} = \overrightarrow{r_H} + \overrightarrow{r_K}$ (3)

Analog, se demonstrează că $FHDL$ şi $DHEM$ sunt paralelograme, deci $\overrightarrow{r_F} + \overrightarrow{r_D} = \overrightarrow{r_H} + \overrightarrow{r_L}$ (4) şi $\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} = \overrightarrow{r_H} + \overrightarrow{r_M}$ (5) **1p**

Din (3), (4) şi (5) rezultă că $2(\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F}) = 3\overrightarrow{r_H} + \overrightarrow{r_K} + \overrightarrow{r_L} + \overrightarrow{r_M}$ **1p**

Cum $\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F} = 3\overrightarrow{r_{G_1}}$ şi $\overrightarrow{r_K} + \overrightarrow{r_L} + \overrightarrow{r_M} = 3\overrightarrow{r_{G_2}}$, reiese $2\overrightarrow{r_{G_1}} = \overrightarrow{r_H} + \overrightarrow{r_{G_2}}$ **1p**

Astfel, G_1 este mijlocul segmentului HG_2, de unde $HG_1 = G_1G_2$ **1p**

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie. Pentru fiecare $a \in \mathbb{Z}$ considerăm funcţia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = (x - a)f(x)$. Arătaţi că dacă există o infinitate de valori $a \in \mathbb{Z}$ pentru care funcţiile f_a sunt crescătoare, atunci funcţia f este monotonă.

Soluţie. Dacă funcţia f_a este crescătoare atunci, oricare ar fi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 < x_2$, avem $f_a(x_1) \leq f_a(x_2)$, adică $a(f(x_2) - f(x_1)) \leq x_2 f(x_2) - x_1 f(x_1)$ (*) **2p**

Să presupunem că funcţia f nu este monotonă. Atunci f nu este crescătoare, deci există $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ cu $p_1 < p_2$ şi $f(p_1) > f(p_2)$ şi f nu este descrescătoare, deci există $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ cu $q_1 < q_2$ şi $f(q_1) < f(q_2)$ **2p**

Astfel, dacă f_a este crescătoare, rezultă din (*) că

$$\frac{p_2 f(p_2) - p_1 f(p_1)}{f(p_2) - f(p_1)} \leq a \leq \frac{q_2 f(q_2) - q_1 f(q_1)}{f(q_2) - f(q_1)}. \qquad (**)$$

Cum relaţia (**) nu poate fi îndeplinită decât de un număr finit de valori întregi ale lui a, presupunerea că f nu este monotonă contrazice ipoteza **3p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a 10-a
Soluţii şi barem de notare

Problema 1. Să se afle x pentru care

$$\log_2(x^2+4)-\log_2 x+x^2-4x+2=0.$$

Soluţie. Avem $x>0$ şi ecuaţia se scrie echivalent

$$\log_2\left(x+\frac{4}{x}\right)=2-(x-2)^2.$$

....3p

Cum $x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$, obţinem $\log_2\left(x+\frac{4}{x}\right)\geq 2$.................2p

Pe de altă parte, $2-(x-2)^2\leq 2$..............................1p

deci ecuaţia are soluţia unică $x=2$..............................1p

Problema 2. Să se arate că numărul

$$\sqrt[n]{\sqrt{2018}+\sqrt{2017}}+\sqrt[n]{\sqrt{2018}-\sqrt{2017}}$$

este iraţional, pentru orice $n\geq 2$. *Gazeta Matematică*

Soluţie. Să presupunem că, pentru un anumit n, numărul este raţional. Notăm $a=\sqrt[n]{\sqrt{2018}+\sqrt{2017}}, b=\sqrt[n]{\sqrt{2018}-\sqrt{2017}}$. Atunci $a+b\in\mathbb{Q}$ şi $ab=1$..1p

Dacă $s_k=a^k+b^k$, atunci $(s_k)_{k\geq 0}$ verifică relaţia de recurenţă

$$s_{k+2}-(a+b)s_{k+1}+s_k=0,$$

pentru orice $k\geq 0$..3p

Cum $s_0=2$ şi $s_1=a+b\in\mathbb{Q}$, deducem că $s_k\in\mathbb{Q}$, pentru orice k....2p

În particular, $s_n=2\sqrt{2018}\in\mathbb{Q}$, contradicţie 1p

Problema 3. Fie a,b,c numere reale, astfel încât $1<b\leq c^2\leq a^{10}$, şi

$$\log_a b+2\log_b c+5\log_c a=12.$$

Să se arate că

$$2\log_a c+5\log_c b+10\log_b a\geq 21.$$

Soluţie Fie $x=\log_a b$, $y=2\log_b c$, $z=5\log_c a$. Din ipoteză rezultă că $x,y,z>0$ şi $x+y+z=12$.......................................1p

De asemenea, obţinem $xyz=10\log_a b\log_b c\log_c a=10$..............1p

Din $b\leq c^2$ deducem $2\log_b c\geq 1$, iar din $c^2\leq a^{10}$ rezultă $5\log_c a\geq 1$, aşadar $y,z\geq 1$, de unde $x\leq 10$ 2p

Să observăm că

$$2\log_a c + 5\log_c b + 10\log_b a = xy + xz + yz = x(y+z) + yz = x(12-x) + \frac{10}{x}$$

. . . . 2p

Inegalitatea $x(12-x) + \frac{10}{x} \geq 21$ este echivalentă cu $(x-1)^2(x-10) \leq 0$, evident adevărată 1p

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se determine numerele complexe z care verifică relaţiile

a) $z^n + z^{n-1} + \ldots + z^2 + |z| = n$;

b) $|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \ldots + |z|^2 + z + 1 = nz^n$.

Soluţie. Observaţia că din enunţ rezultă $n > 2$ se notează cu 1 punct.

Din condiţia a) deducem

$$n = |z^n + z^{n-1} + \ldots + z^2 + |z|| \leq |z|^n + |z|^{n-1} + \ldots + |z|^2 + |z|,$$

de unde $|z| \geq 1$. 1p

Din b) deducem

$$n|z|^n \leq 1 + |z| + |z|^2 + \ldots + |z|^{n-1},$$

şi deducem $|z| \leq 1$, deci $|z| = 1$. 2p

Relaţia b) devine $nz^n - z = n - 1$ $(*)$, de unde $|nz^{n-1} - 1| = n - 1$. . . 1p

Scriind $z = \cos t + i\sin t$, obţinem uşor $\cos(n-1)t = 1$, $\sin(n-1)t = 0$, adică $z^{n-1} = 1$ şi atunci din (*) deducem $z = 1$. 2p

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a XI-a, varianta 2

Problema 1. Arătaţi că, dacă $n \geq 2$ este un număr întreg, atunci există matricele inversabile $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu elementele nenule, aşa încât $A_1^{-1}+A_2^{-1}+\ldots+A_n^{-1} = (A_1+A_2+\ldots+A_n)^{-1}$.

Gazeta Matematică

Soluţie. Egalitatea este echivalentă cu $(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)(A_1^{-1} + A_2^{-1} + \ldots + A_n^{-1}) = I_2$ ... **2p**

Vom lua $A_1 = A$, $A_2 = \ldots = A_n = B$. Cerinţa devine $I_2+(n-1)AB^{-1}+(n-1)BA^{-1}+(n-1)^2 I_2 = I_2$. Notând $AB^{-1} = X$, căutăm X astfel încât $X+X^{-1}+(n-1)I_2 = 0_2$, sau $X^2+(n-1)X+I_2 = 0_2$. Astfel, putem lua $X = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ -1 & -n \end{pmatrix}$ **3p**

Pentru acest X putem lua $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2n-1 & -3n-2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **2p**

Problema 2. Considerăm mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid ab = cd \right\}$.

a) Daţi exemplu de matrice $A \in M$ astfel încât $A^{2017} \in M$ şi $A^{2019} \in M$, dar $A^{2018} \notin M$.

b) Arătaţi că, dacă $A \in M$ şi există numărul întreg $k \geq 1$ astfel încât $A^k \in M$, $A^{k+1} \in M$ şi $A^{k+2} \in M$, atunci $A^n \in M$, oricare ar fi numărul întreg $n \geq 1$.

Soluţie. a) Luăm $A \in M$ astfel încât $A^2 \notin M$ şi $A^2 + A + I_2 = 0_2$, deci $A^3 = I_2 = A^{2019} \in M$, $A^{2017} = A \in M$ şi $A^{2018} = A^2 \notin M$. Un exemplu este $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{3/2} & -2 \end{pmatrix}$ **2p**

b) Din teorema Hamilton-Cayley reiese recursiv că există $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ astfel încât $A^{k+2} = \alpha A + \beta I_2$. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, obţinem $(\alpha a + \beta)\alpha b = \alpha c(\alpha d + \beta)$, de unde $\alpha\beta(b - c) = 0$ **1p**

I) Dacă $b = c$, atunci $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$; în ambele cazuri $A^n \in M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **1p**

II) Dacă $b \neq c$, atunci $\alpha = 0$ sau $\beta = 0$, $A^{k+2} = \beta I_2$ sau $A^{k+2} = \alpha A$ şi analizăm în funcţie de $\delta = \det(A)$.

II.1) Dacă $\delta = 0$, atunci $A \in M$ şi $A^n = (\operatorname{tr}(A))^{n-1} A \in M$ pentru $n \geq 2$ **1p**

II.2) Dacă $\delta \neq 0$, atunci $A^{-1} = \dfrac{1}{\beta} A^{k+1}$, $\beta \neq 0$ sau $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^k$, $\alpha \neq 0$, deci $A^{-1} \in M$. Cum $A^{-1} = \dfrac{1}{\delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, obţinem $bd = ac$, iar $ab = cd$ duce la $b(a+d) = c(a+d)$, deci $a+d = 0$. Aceasta duce mai departe la $a = d = 0$, caz în care $A^n = \begin{pmatrix} 0 & b^n \\ c^n & 0 \end{pmatrix}$ pentru n impar şi $A^n = \begin{pmatrix} b^n & 0 \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$ pentru n par, sau la $a = -d \neq 0$, de unde $b = -c$ şi $A^{2n} = (a^2 - b^2)^n I_2$, $A^{2n+1} = (a^2 - b^2)^n A$; în toate cazurile reiese $A^n \in M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **2p**

Problema 3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietăţile $a_n > 1$ şi $a_{n+1}^2 \geq a_n a_{n+2}$, oricare ar fi $n \geq 1$. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_n = \log_{a_n} a_{n+1}$ pentru $n \geq 1$ este convergent şi calculaţi-i limita.

Soluţie. Din ipoteză reiese $2 \geq \log_{a_{n+1}} a_n + \log_{a_{n+1}} a_{n+2} = \frac{1}{x_n} + x_{n+1}$ (*) **1p**

Deducem $x_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{x_n} \leq x_n$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător **2p**

Cum şirul are termenii pozitivi, rezultă că el este convergent către o limită x **2p**

Trecând la limită în (*) obţinem $(x-1)^2 \leq 0$, deci $x = 1$ **2p**

Problema 4. Fie $a < b$ numere reale şi $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie astfel încât funcţiile $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x - a)f(x)$ şi $h : (a, b) \to \mathbb{R}$, $h(x) = (x - b)f(x)$ să fie crescătoare. Arătaţi că funcţia f este continuă pe (a, b).

Soluţie. Fie $a < c < b$. Pentru $x \in (c, b)$ avem $g(x) \geq g(c)$ şi, cum $x - a > 0$, $f(x) \geq \frac{c-a}{x-a} f(c)$. Apoi, din $h(x) \geq h(c)$ şi $x - b < 0$ rezultă $f(x) \leq \frac{c-b}{x-b} f(c)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to c} \frac{c-a}{x-a} = \lim\limits_{x\to c} \frac{c-b}{x-b} = 1$, folosind criteriul cleştelui, deducem $\lim\limits_{x\searrow c} f(x) = f(c)$ **5p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a XII-a

Varianta 2 — Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Fie $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţia $\max_{0\le x\le 1} |f(x)| = 1$, şi fie $I\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$,

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - f(0) + f(1).$$

(a) Arătaţi că $I(f) < 3$, oricare ar fi $f \in \mathcal{F}$.
(b) Determinaţi $\sup\{I(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$.

Soluţie. **(a)** Fie f o funcţie din $\mathcal{F}$. Din condiţia $\max_{0\le x\le 1} |f(x)| = 1$, rezultă că $I(f) \le \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + 1 + 1 = 3$ .... **2 puncte**

Inegalitatea este strictă, în caz contrar, $f(x) = 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$, şi $f(0) = -1$, contradicţie .... **1 punct**

(b) Pentru $n \ge 2$, funcţia $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx - 1, & 0 \le x \le 1/n, \\ 1, & 1/n < x \le 1, \end{cases}$$

este un element din $\mathcal{F}$. .... **2 puncte**

Pentru această funcţie,

$$\begin{aligned} I(f_n) &= \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x - f_n(0) + f_n(1) = \int_0^{1/n} (2nx-1)\,\mathrm{d}x + \int_{1/n}^1 1\,\mathrm{d}x + 1 + 1 \\ &= (nx^2 - x)\Big|_0^{1/n} + 3 - 1/n = 3 - 1/n. \end{aligned}$$

.... **1 punct**

Prin urmare, $3 - 1/n \le \sup\{I(f) \mid f \in \mathcal{F}\} \le 3$, oricare ar fi $n \ge 2$, deci supremumul cerut este 3. .... **1 punct**

Problema 2. Fie p un număr natural mai mare sau egal cu 2 şi fie $(M, \cdot)$ un monoid finit, astfel încât $a^p \ne a$, oricare ar fi $a \in M \setminus \{e\}$, unde e este elementul neutru al lui M. Arătaţi că $(M, \cdot)$ este grup.

Soluţie. Fie $a \in M \setminus \{e\}$. Cum M este finit, există două numere naturale nenule i şi k, astfel încât $a^i = a^{i+k}$. .... **1 punct**

Prin înmulţiri succesive cu a^k, rezultă că $a^i = a^{i+nk}$, oricare ar fi numărul natural nenul n. .... **1 punct**

Alegem un număr natural m, astfel încât $mk > i$. Prin inmulţirea relatiei anterioare cu a^{mk-i}, obţinem $a^{mk} = a^{2mk}$. .... **3 puncte**

Fie $b = a^{mk}$. Atunci $b = b^2$ şi, prin eventuale înmulţiri succesive cu b, obţinem $b = b^p$. .... **1 punct**

Rezultă că $b = e$, i.e., $a^{mk} = e$. Cum $mk \geq 2$, obţinem $a^{mk-1} \cdot a = a \cdot a^{mk-1} = e$, deci a este inversabil şi, prin urmare, $(M, \cdot)$ este grup. .... **1 punct**

Problema 3. Arătaţi că o funcţie continuă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este crescătoare dacă şi numai dacă

$$(c-b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

oricare ar fi numerele reale $a < b < c$.

Soluţie. Dacă f este crescătoare şi $a < b < c$, atunci

$$(c-b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (c-b)(b-a)f(b) = (b-a)(c-b)f(b) \leq (b-a)\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

.... **3 puncte**

Reciproc, fie a şi b două numere reale, astfel încât $a < b$, şi fie $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Dacă x şi y sunt numere reale, astfel încât $a < x < y < b$, din relaţia din enunţ rezultă că

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} \leq \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \leq \frac{F(b)-F(y)}{b-y}.$$

.... **2 puncte**

Cum F este derivabilă şi $F' = f$, obţinem

$$f(a) = F'(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} \leq \lim_{y \nearrow b} \frac{F(b)-F(y)}{b-y} = F'(b) = f(b).$$

.... **2 puncte**

Remarcă. Implicaţia directă nu necesită continuitatea lui f, deoarece monotonia funcţiei implică integrabilitatea pe orice interval compact.

Implicaţia reciprocă nu necesită nici ea continuitatea lui f, ci doar existenţa primitivelor pe $\mathbb{R}$.

În cazul în care f este continuă, implicaţia directă mai poate fi demonstrată după cum urmează: conform teoremei de medie, există $\alpha \in (a,b)$ şi $\beta \in (b,c)$, astfel încât

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\alpha) \quad \text{şi} \quad \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = (c-b)f(\beta).$$

Cum $\alpha < \beta$, rezultă $f(\alpha) \leq f(\beta)$, deci

$$(c-b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (c-b)(b-a)f(\alpha) \leq (b-a)(c-b)f(\beta) = (b-a)\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problema 4. Fie n şi q două numere naturale, $n \geq 2$, $q \geq 2$ şi $q \not\equiv 1 \pmod 4$, şi fie K un corp finit care are exact q elemente. Arătaţi că, oricare ar fi elementul a din K, există x şi y în K, astfel încât $a = x^{2^n} + y^{2^n}$. (Orice corp finit este comutativ.)

Soluţie. Fie p caracteristica lui K. Atunci p este prim şi $q = p^\alpha$, unde α este un număr natural nenul. Cum $q \not\equiv 1 \pmod 4$, rezultă că şi $p \not\equiv 1 \pmod 4$, deci $p = 2$ sau $p \equiv 3 \pmod 4$ şi, în acest caz, α este impar. .... **1 punct**

Dacă $p = 2$, iar x şi y sunt elemente ale lui K, astfel încât $x^{2^n} = y^{2^n}$, atunci $x = y = 0$ sau, în cazul în care $y \neq 0$, $(xy^{-1})^{2^n} = 1$. Cum $(xy^{-1})^{2^\alpha - 1} = (xy^{-1})^{q-1} = 1$, obţinem $xy^{-1} = 1$, deci $x = y$. Prin urmare, funcţia $f\colon K \to K$, $f(x) = x^{2^n}$, este injectivă, deci surjectivă. Dacă a este un element oarecare din K, atunci există un element x în K, astfel încât $a = f(x)$, deci $a = x^{2^n} + 0^{2^n}$. .... **2 puncte**

Dacă $p \equiv 3 \pmod 4$ şi α este impar, atunci şi $q \equiv 3 \pmod 4$, i.e., $q = 4k + 3$, unde k este un număr natural. Fie $g\colon K^* \to K^*$, $g(x) = x^{2^n}$, şi fie x şi y două elemente din K^*, astfel încât $g(x) = g(y)$. Atunci $(xy^{-1})^{2^n} = 1$ şi cum $(xy^{-1})^{4k+2} = (xy^{-1})^{q-1} = 1$, iar $(2^n, 4k+2) = 2$, rezultă $(xy^{-1})^2 = 1$, deci $xy^{-1} = \pm 1$, i.e., $y = \pm x$. .... **1 punct**

Cum p este impar, rezultă că $1 \neq -1$, deci imaginea funcţiei g are exact $(q-1)/2$ elemente. .... **1 punct**

Fie $K_n = \{x^{2^n} \mid x \in K\} = \{0\} \cup \operatorname{Im} g$. Evident, $|K_n| = 1 + (q-1)/2 = (q+1)/2$. Dacă a este un element oarecare al lui K, atunci $|K_n| = |a - K_n| = (q+1)/2$, deci cele două mulţimi, K_n şi $a - K_n$, nu sunt disjuncte. Prin urmare, există u şi v în K_n, astfel încât $u = a - v$. Cum $u = x^{2^n}$ şi $v = y^{2^n}$, unde x şi y sunt elemente din K, obţinem $a = x^{2^n} + y^{2^n}$. .... **2 puncte**