OJM 2018, clasa a VII-a.
O soluţie scurtă, naturală şi o generalizare la problema 4.

de Silviu Boga, profesor, Iaşi

Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A})=80^0$ şi $m(\widehat{C})=30^0$. Considerăm punctul M interior triunghiului ABC astfel încât $m(\widehat{MAC})=60^0$ şi $m(\widehat{MCA})=20^0$. Dacă N este intersecţia dreptelor BM şi AC, să se arate că $(MN$ este bisectoare a unghiului $\widehat{AMC}$.

SOLUŢIE

Cum $m(\widehat{C})=30^0$, considerând cercul $C(O;r)$ circumscris triunghiului ABC $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle AOB)=60^0$, deci triunghiul AOB este echilateral şi totodată triunghiurile OBC şi OAC sunt isoscele, cu $m(\widehat{OAC})=m(\widehat{OCA})=20^0$ şi $m(\widehat{OCB})=m(\widehat{OBC})=10^0$. Considerând M' punctul în care bisectoarea unghiului $\widehat{ABO}$ intersectează dreapta BO, se dovedeşte imediat $M'\equiv M$. Într-adevăr, deoarece $m(\widehat{BOM'})=20^0=m(\widehat{BAM'})$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{M'AC})=60^0$ şi având $m(\widehat{M'CA})=20^0$, se justifică $M'\equiv M$ şi coliniaritatea punctelor B, M, N este imediată.

GENERALIZARE: În enunţul problemei efectuăm modificările $m(\widehat{A})=(60+x)^0$, cu $x\in(0;30)$, $m(\widehat{MAC})=3x^0$, $m(\widehat{MCA})=x^0$, restul enunţului rămânând nemodificat. Rezolvarea urmează în mod identic aceiaşi paşi iar în cazul $x=20$ avem problema iniţială.