MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX–a

Problema 1.
Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m+1)x^2-2(m+2)\cdot x+m+2, m\neq 1$.
Să se determine parametrul real m astfel încât:
a) ${x_1}^2+{x_2}^2=x_1\cdot x_2$, unde x_1,x_2 sunt rădăcinile ecuației $f(x)=0$.
b) Graficul funcției să nu intersecteze axa (Ox).
c) $f=f(x)$să aibă valoarea minima negativă.

SOLUȚIE:

a) $\begin{cases} x_1+x_2=2\cdot\frac{m+2}{m+1} \\ x_1\cdot x_2=\frac{m+2}{m+1}\end{cases}$ relațiile lui Viète........ 2p
${x_1}^2+{x_2}^2=x_1\cdot x_2 \Rightarrow (x_1+x_2)^2=3x_1\cdot x_2$........ 1p
Rezultă $4\left(\frac{m+2}{m+1}\right)^2=3\cdot\frac{m+2}{m+1}\Rightarrow\frac{m+2}{m+1}\cdot\left(4\cdot\frac{m+2}{m+1}-3\right)=0\Rightarrow m\in\{-5,-3\}$........ 1p
b) Este suficient ca $\Delta=4(m+2)^2-4(m+1)(m+2)<0$........ 1p
Rezultă $m<-2\Leftrightarrow m\in(-\infty,-2)$........ 1p
c) $f=f(x)$ are valoarea minimă negativă dacă
$\begin{cases} m+1>0 \\ -\frac{\Delta}{4(m+1)}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m+1>0 \\ \frac{m+2}{m+1}>0\end{cases}\Rightarrow m\in(-1,\infty)$........ 1p

Problema 2.
Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat având latura de lungime$l>0$.
Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$, în funcție de l.

SOLUȚIE:
Deoarece $ABCDEF$ un hexagon regulat rezultă că $AEDB$, $AFDC$ sunt dreptunghiuri........ 2p
Astfel, în $AEDB$: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$, iar în AFDC: $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$........ 2p
Din cele două relații se obține:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}$........ 2p
Așadar, mărimea cerută$3\left|\overrightarrow{AD}\right|=3\cdot 2l=6l$........ 1p

Problema 3.

Pe laturile AB, BC, DAși DCale patrulaterului convex $ABCD$, se consideră punctele M, N, P, Q astfel încât:$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{DQ} = 2\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PD}$.

Să se demonstreze că dacă $3 \cdot (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MQ}) = 2 \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

SOLUȚIE:

Din ipoteză avem: $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.. 2p

Obținem $3 \cdot (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MQ}) = \overrightarrow{AD} + 2 \cdot \overrightarrow{DC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}[1]$.. 2p

Dar,$3 \cdot (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MQ}) = 2 \cdot \overrightarrow{DC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ [2]. Din [1] și [2] obținem:

$\overrightarrow{AD} + 2 \cdot \overrightarrow{DC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{DC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, echivalentă cu $\overrightarrow{AD} + +\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, adică $ABCD$ este paralelogram... 3p

Problema 4.

Două corpuri aflate la o distanță de 153 de metri se deplasează unul către celălalt. Primul corp parcurge 10m/s, iar al doilea parcurge în prima secundă 3m și în fiecare secundă următoare cu 5m mai mult decât în secunda precedentă. După câte secunde se întâlnesc cele două corpuri?

SOLUȚIE:

Notăm cu A și B cele două corpuri, cuAB distanța inițială dintre ele, v_A ,viteza corpului A și cu v_B, viteza corpului B 1p

Avem$v_A = 10m/s$, iar corpul Bparcurge: 3 metri în prima secundă, $(3 + 5)$ metri în a doua secundă, $(3 + 5 + 5)$ metri în a treia secundă,... și $[3 + 5(n - 1)]$ metri în a n-a secundă 1p

Notăm cu n numărul de secunde după care se întâlnesc cele două corpuri.

Cum $AB = 153$ metri $\Rightarrow 10n + 3 + (3 + 5) + (3 + 5 + 5) + \cdots + [3 + 5(n - 1)] = 153$ 1p

Obținem $10n + \sum_{k=1}^{n}[3 + 5(k-1)] = 153$ 1p

Rezultă $10n + 3n + 5 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - 5n = 8n + 5\sum_{k=1}^{n} k$ 1p

$8n + 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 153 \Rightarrow 5n^2 + 21n - 306 = 0$ 1p

$n_{1,2} = \frac{-21 \pm \sqrt{6561}}{10} = \frac{-21+81}{10} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = -10,2 \text{ (nu convine)} \\ n_2 = 6 \text{ (soluţie)} \end{cases}$ 1p

***<u>Notă</u>:** Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X–a

Problema 1.

a) Să se rezolve, în $\mathbb{R}$, ecuația: $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$.

b) Să se rezolve, în$\mathbb{R}$, inecuația:$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{5x+2}}\leq\frac{25}{4}$.

SOLUȚIE:

a) Condiție de existență: $x\geq -1$........................ 0.5p

Ecuația devine $\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}=2$........................ 1p

Rezultă: $\sqrt{x+1}+1+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=2$........................ 1p

$\left|\sqrt{x+1}-1\right|=\begin{cases}\sqrt{x+1}-1, & x\geq 0\\ 1-\sqrt{x+1}, & x\in[-1,0)\end{cases}$........................ 0.5p

Dacă $x\geq 0$, ecuația devine $\sqrt{x+1}+1+\sqrt{x+1}-1=2\Rightarrow x=0$........................ 1p

Dacă $x\in[-1,0)$, ecuația devine $\sqrt{x+1}+1+1-\sqrt{x+1}=2$(identitate) $\Rightarrow x\in[-1,0)$

Așadar, $x\in[-1,0]$........................ 1p

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{5x+2}}\leq\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\Rightarrow\frac{6-5x}{5x+2}\geq -2$, cu $x\neq-\frac{2}{5}$........................ 1p

$\frac{6-5x}{5x+2}\geq-2\Rightarrow\frac{x+2}{5x+2}\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty,-2]\cup\left(-\frac{2}{5},\infty\right)$........................ 1p

Problema 2.

a) Calculați: $A=\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_{a^2} x}+\ldots+\frac{1}{\log_{a^n} x}$, unde $a,x\in(0,\infty)\setminus\{1\}, n\in\mathbb{N}^*$.

b) Notăm $t=\log_2 3$. Dacă $u=\log_{12}18$ și $v=\log_{24}54$, să se demonstreze că $u\cdot v+5(u-v)=1$.

SOLUȚIE:

a) $A=\log_x a+\log_x a^2+\ldots+\log_x a^n=(1+2+3\ldots+n)\log_x a=\frac{n(n+1)}{2}\log_x a$........................ 3p

b) $u=\frac{\log_2(2\cdot 3^2)}{\log_2(2^2\cdot 3)}=\frac{1+2t}{2+t}$........................ 1p

$v=\frac{\log_2(2\cdot 3^3)}{\log_2(2^3\cdot 3)}=\frac{1+3t}{3+t}$........................ 1p

$u\cdot v+5(u-v)=\dfrac{(1+2t)(1+3t)}{(2+t)(3+t)}+5\cdot\left(\dfrac{1+2t}{2+t}-\dfrac{1+3t}{3+t}\right)=\dfrac{t^2+5t+6}{t^2+5t+6}=1$ 2p

Problema 3.
Fie $a\in(0,\infty)\setminus\{1\}, b\in(0,\infty)$ și $c\in[0,\infty)$ astfel încât $\log_a(bx+c)=b\log_a x+c, (\forall)\ x\in(0,\infty)$.
a) Să se demonstreze că $\log_a(ab+c)=b+c$.
b) Să se demonstreze că $\log_a\left(\dfrac{b}{a}+c\right)=c-b$.
c) Să se determine numerele a,b,c care satisfac egalitatea din enunț, $(\forall)x\in(0,\infty)$.

SOLUȚIE:

a) În egalitatea data punem $x=a\Rightarrow\log_a(ab+c)=b+c$. 1p
b) În egalitatea data punem $x=\dfrac{1}{a}\Rightarrow\log_a\left(\dfrac{b}{a}+c\right)=c-b$. 1p
c) Pentru $x=1\Rightarrow\log_a(b+c)=c$. Adunăm relațiile de la a) și b) și obținem:
$\log_a(ab+c)+\log_a\left(\dfrac{b}{a}+c\right)=2c=2\log_a(b+c)$. 1p
Rezultă $(ab+c)\left(\dfrac{b}{a}+c\right)=(b+c)^2$ 1p
Obținem $abc+\dfrac{bc}{a}=2bc\,|:b\neq 0\Rightarrow c\cdot(a-1)^2=0$ 1p
Cum $a\neq 1\Rightarrow c=0$. Din $\log_a b=0\Rightarrow b=1$ 1p
Așadar, $\begin{cases}a\in(0,\infty)\setminus\{1\}, \text{arbitrar}\\ b=1\\ c=0\end{cases}$ 1p

Problema 4.
Unui angajat al unei firme de vânzări autoturisme i se acordă, pe lângă salariul de bază de 400 RON/lună și un comision din vânzări după cum urmează: dacă reușește să vândă cel puțin 20 de mașini în acea lună, i se dă un comision de 300 RON pentru fiecare mașină vândută, iar pentru ceea ce depășește 20 de mașini vândute i se dă un comision de 400 RON pentru fiecare mașină vândută.
a) Determinați funcția pe baza căreia i se calculează salariul vânzătorului.
b) Cât primește el într-o lună pentru 10 mașini vândute?
c) Câte mașini trebuie să vândă într-o lună pentru a câștiga 10000 RON în acea lună?

SOLUȚIE:

a) $f(n)=400+\begin{cases}300n, \text{dacă n}\le 20\\ 6000+400(n-20), \text{dacă n>20}\end{cases}$, n fiind numărul mașini vândute ....
3p
b) $f(10)=400+300\cdot 10=3400$ RON 1p
c) Este necesar să vândă mai mult de 20 de mașini pentru că $f(20)=6400$ 2p
$6400+400(n-20)=10000\Rightarrow n=29$ 1p

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Clasa a XI -a

Problema 1.
În factura pe care o primește o familie de la S.C.Apavital Iași se află următoarele informații:

Servicii	Cantitatea	Preț/lei/ m^3	Cota TVA
Apă rece potabilă	$17m^3$	$3,40$	9%
Canalizare apă	$17m^3$	$2,53$	19%

a) Ce sumă îi revine Societății Comerciale Apavital Iași pentru serviciile furnizate?
b) Ce sumă pleacă la bugetul de stat?
c) Ce procent reprezintă suma ce pleacă la bugetul de stat din suma totală plătită de familie?

SOLUȚIE:
a) Societății îi revine suma fără TVA 2p
$17\cdot(3,40+2,53)=17\cdot 5,93=100,81$ (lei).. 1p
b) La bugetul de stat pleacă $9\%\cdot(17\cdot 3,40)+19\%\cdot(17\cdot 2,53)=$ 1p
$5,20+8,17=13,37$ (lei).. 1p
c) Suma plătită de familie $100,81+13,37=114,18$ (lei).. 1p
$13,37:114,18\cdot 100\cong 11,7\%$ 1p

Problema 2.
În tabelul de mai jos este prezentată distribuția elevilor dintr-o școală generală după înălțime.

Înălțimea(cm)	$[150,154)$	$[154,158)$	$[158,162)$	$[162,166)$	$[166,170)$	$[170,174]$
Număr de elevi	38	65	175	190	111	62

a) Demonstrați că $|M_o - M_e| < 0,3\,\text{cm}$ (M_o = dominanta, M_e = mediana).
b) Care dintre caracteristicile M_o , M_e este reprezentativă pentru populația statistică din această școală?
c) Câți elevi au înălțimea cuprinsă în intervalul $\left[\overline{X}+\left|\overline{X}-M_e\right|, \overline{X}+\left|\overline{X}-M_o\right|\right]$ ($\overline{X}$ = înălțimea medie)?

SOLUȚIE:
a) $[162,166)$ este clasa modală, iar

$$M_o = l+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\cdot k = 162+\frac{190-175}{(190-175)+(190-111)}\cdot(166-162)\cong 162,63\text{ cm}$$ 1p

$$M_e = l+\frac{k}{n_i}\cdot(C_M - N_{i-1}) = 162+\frac{166-162}{190}\cdot\left[321-(38+65+175)\right]\cong 162,90\text{ cm}$$ 1p

unde l este limita inferioară a clasei modale, k este amplitudinea clasei modale, Δ_1 şi Δ_2 sunt valorile absolute ale diferenţelor dintre frecvenţa clasei modale şi aceea a clasei anterioare ei, respectiv clasei următoare, C_M este cota medianei, iar N_{i-1} este frecvenţa absolută cumulată crescătoare până la clasa mediană.

$\left|M_o - M_e\right| \cong 0,27 < 0,3\,\text{cm}$ 1p

b) $\overline{X} = \dfrac{38\cdot152+65\cdot156+175\cdot160+190\cdot164+111\cdot168+62\cdot172}{641} \cong 162,85\,\text{cm}$ 1p

M_e este reprezentativă deoarece este mai apropiată de $\overline{X}$ 1p

c) $\left[\overline{X}+\left|\overline{X}-M_e\right|, \overline{X}+\left|\overline{X}-M_o\right|\right] = \left[162,90\,;163,07\right]$ 1p

Partea întreagă a numărului $\left(163,07-162,90\right):\dfrac{166-162}{190}$ este 8 (elevi) 1p

Problema 3.

a) Fie G un graf cu n vârfuri ($n \geq 3$) și $\dfrac{n^2-3n+4}{2}$ muchii. Să se demonstreze că G nu are vârfuri izolate.

b) Un grup format din 15 elevi joacă 92 partide de șah. Știind că orice pereche de elevi joacă cel mult o partidă, să se demonstreze că fiecare elev joacă cel puțin o partidă de șah.

SOLUȚIE:

a) Dacă există un vârf izolat, numărul maxim de muchii este $C_{n-1}^2 = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$ 2p

$\dfrac{(n-2)(n-1)}{2} < \dfrac{n^2-3n+4}{2}$ 1p

Finalizare.. 1p

b) Asociem un graf cu 15 vârfuri și 92 muchii.. 1p

Dacă există un vârf izolat, numărul maxim de muchii este $C_{14}^2 = \dfrac{13\cdot14}{2} = 91 < 92$ 1p

Finalizare.. 1p

Problema 4.

Este cunoscut rezultatul: “ **Pentru orice graf conex planar $G=(X,U)$ cu mai mult de trei vârfuri avem următoarea inegalitate $|U| \leq 3|X|-6$**”. Să se demonstreze că orice graf complet cu $|X| \geq 5$, nu este planar ($|X|$ este cardinalul mulțimii X).

SOLUȚIE:

Demonstrăm că $|U| > 3|X|-6$ este adevărată pentru orice graf complet cu $|X| \geq 5$ 3p

Notăm $|X| = n$.

$|U| > 3|X|-6 \Leftrightarrow C_n^2 > 3n-6 \Leftrightarrow \dfrac{(n-1)\cdot n}{2} > 3n-6$ 2p

$\dfrac{(n-1)\cdot n}{2} > 3n-6 \Leftrightarrow (n-3)(n-4) > 0$ 1p

Finalizare.. 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII-a

Problema 1.

Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, a, b, c numere reale.

a) Calculați B^2 și B^3.

b) Calculați B^{2018}.

c) Demonstrați că $A=a\cdot I_3+b\cdot B+c\cdot B^2$.

SOLUȚIE:

a) $B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

$B^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$ 1p

b) Observăm că $B^{3k}=I_3$; $B^{3k+1}=B$; $B^{3k+2}=B^2$, pentru k număr natural 2p

$2018=3\cdot 672+2 \Rightarrow B^{2018}=B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

c) Calcul direct. 2p

Problema 2.

Fie punctele $A(1, 3)$, $B(2, -1)$, $C(-2, 2)$, $D(a, 3a-2)$, unde a este un număr real.

a) Calculați aria triunghiului ABC.

b) Pentru ce valori ale numărului real a, punctele A, B, D sunt coliniare?

SOLUȚIE:

a) Aria triunghiului ABC este $\frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -13$ 2p

Aria triunghiului ABC este $\frac{13}{2}$. 1p

b) A, B, D coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_D \\ y_A & y_B & y_D \end{vmatrix} = 0$ 2p

Obținem $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 3a-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7a - 9 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{9}{7}$. 2p

Problema 3.

Fie x un număr real și matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $(A(x))^2 = 2x \cdot A(x)$, pentru orice x număr real.

b) Aflați numărul real x astfel încât $(A(x))^4 + (A(x))^2 = O_2$.

c) Demonstrați că nu există matrice X de ordinul 2 cu elementele numere reale astfel încât $X^2 = A(0)$.

SOLUȚIE:

a) $(A(x))^2 = A(x) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} 2x(x+1) & 2x(x^2-1) \\ 2x & 2x(x-1) \end{pmatrix} = 2x \cdot A(x)$, pentru orice x număr real. 2p

b) Obținem: $\left((A(x)^2\right)^2 = (2x \cdot A(x))^2 = 4x^2 \cdot (A(x))^2 = 8x^3 \cdot A(x)$ și ecuația devine $(8x^3 + 2x) \cdot A(x) = O_2$. 1p

Evident $A(x) \neq O_2 \Rightarrow 8x^3 + 2x = 0 \Rightarrow 2x(4x^2+1) = 0 \Rightarrow x = 0$. 1p

c) $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Notăm $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Evident $X^2 \cdot X = X \cdot X^2$.

Dacă presupunem că $X^2 = A(0)$, atunci $A(0) \cdot X = X \cdot A(0)$ 1p

Obținem: $\begin{pmatrix} a+b & -a-b \\ c+d & -c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ -a-b = b-d \\ c+d = a-c \\ -c-d = b-d \end{cases} \Rightarrow c = -b;\ d = a + 2b \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+2b \end{pmatrix}$ 1p

Din $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ obținem sistemul $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab + 2b^2 = -1 \\ a^2 + 4ab + 3b^2 = -1 \end{cases}$.

Scăzând ultimele două ecuații membru cu membru, obținem $(a+b)^2 = 0 \Rightarrow a = -b$ și înlocuind în prima ecuație obținem 0 = 1 (fals!) 1p

Problema 4.

Numim cod o matrice A de ordin 3 care are trei elemente egale cu 1, iar restul egale cu 0. Dacă, în plus, $\det A \neq 0$, codul se numește supercod.

a) Dați exemplu de un cod și un exemplu de supercod.

b) Dacă A este un supercod, arătați că pe fiecare linie și pe fiecare coloană există un singur 1.

c) Care este numărul codurilor pe care le putem forma?

SOLUȚIE:

a) Exemplu de cod: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

Exemplu de supercod: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

b) Fie A supercod, atunci pe fiecare linie (coloană) există cel puțin un 1 (în caz contrar, o linie (coloană) conține numai zerouri, deci $\det A = 0$). 1p

Dar matricea are trei elemente egale cu 1. În concluzie, pe fiecare linie și pe fiecare coloană există un singur 1. .... 1p

c) Trebuie completate 9 locuri cu trei de 1 și șase de 0. .... 1p

Trebuie alese trei locuri dintre 9 locuri și completate cu 1. Sunt $C_9^3 = 84$ coduri. 2p