

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘIETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

Problema 1.

Considerăm progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ și progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$, $b_n = 2^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ încât $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2018^2$.
- Demonstrați că rezultatul calculului $b_{n+1} - 3(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ nu depinde de $n \in \mathbb{N}^*$.
- Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $b_n \geq 1 + a_n$.

Problema 2.

Spunem că perechea de numere naturale nenule $(m; n)$ este *interesantă* dacă $0, (3) < \frac{m}{n} < 0,34$.

- Stabiliți dacă perechea $(330; 1000)$ este interesantă.
- Determinați valorile posibile ale lui n astfel încât perechea $(330; n)$ să fie interesantă.
- Aflați câte perechi de numere interesante de forma $(m; 1000)$ sunt.
- Determinați m și n astfel încât perechea $(m; n)$ să fie interesantă și m să aibă valoare minimă.

Problema 3.

Un atlet aleargă în jurul unui teren de formă dreptunghiulară $ABCD$ cu lungimea de $150m$ și lățimea de $50m$, pe traseul $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \dots$ și fără a-și schimba sensul de alergat.

El pleacă din A cu zero puncte și de fiecare dată când ajunge într-unul din vârfurile B, C, D, A, B, C, \dots primește puncte după următoarea regulă: câte 1 punct în B ; câte 2 puncte în C ; câte 3 puncte în D ; câte 4 puncte în A .

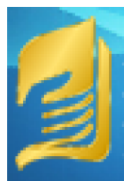
- Aflați în ce punct s-a aflat atletul în momentul în care a înregistrat 53 de puncte.
- Determinați câți kilometri a parcurs atletul de la momentul plecării până când a înregistrat 53 de puncte.
- Aflați dacă atletul poate obține exact 2018 puncte.

Problema 4.

Considerăm paralelogramul $ABCD$ și punctele $M \in (DC)$, $N \in (BM)$ astfel încât $DM = 3MC$ și $BN = 4NM$.

- Verificați că $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$.
- Demonstrați că $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- Exprimați vectorul \overrightarrow{AN} în funcție de vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AD} .
- Arătați că punctele A, N, C sunt coliniare și calculați valoarea raportului $\frac{AN}{NC}$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

Problema 1.

Pentru fiecare $x \in (0; +\infty)$, considerăm numerele $a_n(x) = (\sqrt{x})^{2^{1-n}} \cdot (\sqrt[3]{x})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Demonstrați că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n(x)$ nu depinde de x .
- Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ în cazul în care $a_n(3) = 27$.
- Determinați $x \in (0; +\infty)$ în cazul în care $a_{45}(x) = 3$.
- Demonstrați că pentru o infinitate de valori $x \in (0; +\infty)$ șirul $a_n(x)$ are toți termenii numere raționale.

Problema 2.

Pentru fiecare număr real a definim numărul $z_a = \frac{a+i}{1+a \cdot i}$, unde $i^2 = -1$.

- Demonstrați că $|z_a| = 1$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
- Demonstrați că $z_a \neq -i$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
- Determinați numerele reale a pentru care partea imaginară a numărului z_a este egală cu $-\frac{4}{5}$.
- Calculați produsul $p = z_1 \cdot z_{\frac{1}{2}} \cdot z_{\frac{1}{3}} \cdot \dots \cdot z_{\frac{1}{2018}} \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_{2018}$.

Problema 3.

Fie numărul real $a = \sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

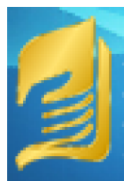
- Verificați $a^3 - 6a - 8 = 0$.
- Demonstrați că $a \in (\sqrt{6}; 3)$.
- Demonstrați că numărul $x = \log_2(a^2 - 6) + \log_a\left(\frac{8}{a} + 6\right) + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{a}$ este natural.

Problema 4.

Un program de calculator simulează o traiectorie curbă închisă, de lungime 15 cm și pe care două mobile pornesc din același punct dar în sensuri opuse, respectiv cu legile de deplasare date de funcțiile $f(x) = x + 2^x - 1$ și $g(x) = x + \log_2(x+1)$, unde variabila $x \geq 0$ reprezintă momentul măsurat în secunde iar $f(x)$ și $g(x)$ reprezintă distanța parcursă de cele două mobile de la momentul zero al deplasării până la momentul $x \geq 0$, măsurată în centimetri. Vom nota cu M mulțimea momentelor de întâlnire ale celor două mobile. Răspundeți la următoarele cerințe:

- Demonstrați că $x \in M$ dacă și numai dacă $(\exists) n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(x) + g(x) = 15n$.
- Determinați momentul primei întâlniri a celor două mobile.
- Demonstrați că $x = 2^{68} - 1 \in M$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

Problema 1.

Fie matricea unitate $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- Calculați $B = A - a \cdot I_3$.
- Verificați $B^2 = B + 2I_3$ și $A^2 = (2a+1) \cdot A - (a^2 + a - 2) \cdot I_3$.
- Demonstrați că A este inversabilă pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ și determinați A^{-1} .

Problema 2.

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și determinantul $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$.

Totodată, în sistemul de coordonate (xOy) , considerăm punctele $A_n(n; n^2)$, $n \in \mathbb{Z}$.

- Demonstrați că $D(a, b, c) = (b-a)(c-a)(c-b)$.
- Demonstrați că pentru orice trei numere întregi distincte m, n, k , punctele $A_m(m; m^2)$, $A_n(n; n^2)$, $A_k(k; k^2)$ sunt necoliniare și aria triunghiului $A_m A_n A_k$ este număr natural.
- Demonstrați că aria triunghiului $A_{n-2018} A_n A_{n+2018}$ nu depinde de $n \in \mathbb{Z}$.
- Demonstrați că nici unul din triunghiurile $A_m A_n A_k$, cu $m, n, k \in \mathbb{Z}$, nu are aria egală cu 2.

Problema 3.

Două funcții f, g le numim *a-înrudite*, $a \in \mathbb{R}$, dacă există și este finită limita $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - a \cdot g(x)]$.

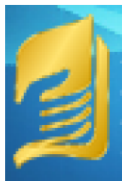
- Demonstrați că funcțiile $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1}$ și $g(x) = \frac{x-2}{x-1}$ sunt 2-înrudite.
- Determinați $a \in \mathbb{R}$ încât $f(x) = \frac{\sqrt{4x+5}}{x^2 - x}$ și $g(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}$ să fie *a-înrudite*.
- Dacă alegem trei funcții f, g, h încât f și g sunt *a-înrudite* iar g și h sunt *b-înrudite*, demonstrați că atunci f și h sunt *ab-înrudite*.

Problema 4.

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ încât funcția $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} + cx$ are domeniul maxim \mathbb{R} și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

- Demonstrați că $a = 2$, $b \in [1; +\infty)$ și $c = -1$.
- Demonstrați că toate funcțiile cu această proprietate au aceleași asimptote.
- Arătați că nici una din funcțiile obținute nu este funcție rațională.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

Problema 1.

Considerăm structura algebrică $(\mathbb{R}; \circ)$ cu legea de compoziție $x \circ y = 3xy - 2x + y - 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

- Demonstrați $(\mathbb{R}; \circ)$ este structură neasociativă.
- Stabiliți dacă $(\mathbb{R}; \circ)$ admite element neutru.
- Rezolvați în $(\mathbb{R}; \circ)$ sistemul
$$\begin{cases} (x-1) \circ y = 9 \\ (x+1) \circ (y-1) = 13 \end{cases}$$

Problema 2.

Fie matricele $X(a) = a \cdot A + I_2$, cu $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și considerăm mulțimea $G = \{X(a) / a > -1\}$.

- Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ se verifică $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$.
- Demonstrați că G împreună cu operația de înmulțire a matricelor este grup comutativ.
- Calculați produsul $X\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot X\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \dots \cdot X\left(-\frac{2017}{2018}\right) \cdot X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(2018)$.

Problema 3.

Considerăm funcția $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

- Calculați $\int f(x) dx$.
- Demonstrați că orice primitivă F a funcției f verifică $F(2) < F(3)$.
- Demonstrați că funcția $g: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |f(x)|$, admite primitive și determinați, din mulțimea primitivelor ei, acea primitivă G care verifică $G(1) = 0$.

Problema 4.

Rata de descreștere a unei populații de bacterii de pe o plantă, după t zile de la administrarea de insecticid, este dată de formula $B'(t) = \frac{-3000}{(1+0,2t)^2}$, $t \geq 0$. Dacă numărul inițial al bacteriilor a fost de 8.000, aflați după câte zile numărul bacteriilor va fi cel mult egal cu 500.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.