



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

Considerăm progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ și progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$, $b_n = 2^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ încât $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2018^2$.
- Demonstrați că rezultatul calculului $b_{n+1} - 3(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ nu depinde de $n \in \mathbb{N}^*$.
- Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $b_n \geq 1 + a_n$.

SOLUȚIE:

- $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n^2$ 2p
 $n^2 = 2018^2 \Rightarrow n = 2018$ 1p
- $b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{4^n - 1}{3}$ 1p
 $b_{n+1} - 3(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = 2^{2n+1} - 2 \cdot (4^n - 1) = 2$ 1p
- Pentru $n = 1$, $b_1 \geq 1 + a_1 \Leftrightarrow 2 \geq 2$ și pentru ca inducția matematică să confirme inegalitatea $b_n \geq 1 + a_n$ pentru orice $n \geq 1$ avem de demonstrat implicația $b_k \geq 1 + a_k \Rightarrow b_{k+1} \geq 1 + a_{k+1}$ 1p

dar $b_{k+1} = 4b_k \geq 4 \cdot (1 + a_k) = 8k + 4 \geq 2k + 2 = 1 + a_{k+1}$ 1p

Problema 2.

Spunem că perechea de numere naturale nenule $(m; n)$ este *interesantă* dacă $0, (3) < \frac{m}{n} < 0,34$.

- Stabiliți dacă perechea $(330; 1000)$ este interesantă.
- Determinați valorile posibile ale lui n astfel încât perechea $(330; n)$ să fie interesantă.
- Aflați câte perechi de numere interesante de forma $(m; 1000)$ sunt.
- Determinați m și n astfel încât perechea $(m; n)$ să fie interesantă și m să aibă valoare minimă.

SOLUȚIE:

- $\frac{m}{n} = \frac{330}{1000} = 0,33 < 0, (3)$, contrazice $0, (3) < \frac{m}{n}$, deci $(330; 1000)$ nu este interesantă 1p

- b) $m = 330 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{330}{n} < \frac{34}{100}$ 1p
 $970, \dots < n < 990 \Rightarrow n \in \{971; 972; \dots; 989\}$ 1p
- c) $n = 1000, \frac{1}{3} < \frac{m}{1000} < \frac{34}{100}$ 1p
 $333 < m < 340 \Rightarrow m \in \{334; 335; \dots; 339\}$, 6 soluții 1p
- d) $\frac{1}{3} < \frac{m}{n} < \frac{34}{100} \Leftrightarrow \frac{100m}{34} < n < 3m$ 1p
 cum n și $3m$ sunt numere naturale, există n numai dacă $\frac{100m}{34} < 3m - 1$, deci $m > 17$, $m_{\min} = 18$
 și atunci $n = 53$ 1p

Problema 3.

Un atlet aleargă în jurul unui teren de formă dreptunghiulară $ABCD$ cu lungimea de $150m$ și lățimea de $50m$, pe traseul $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \dots$ și fără a-și schimba sensul de alergat.

El pleacă din A cu zero puncte și de fiecare dată când ajunge într-unul din vârfurile B, C, D, A, B, C, \dots primește puncte după următoarea regulă: câte 1 punct în B ; câte 2 puncte în C ; câte 3 puncte în D ; câte 4 puncte în A .

- Aflați în ce punct s-a aflat atletul în momentul în care a înregistrat 53 de puncte.
- Determinați câți kilometri a parcurs atletul de la momentul plecării până când a înregistrat 53 de puncte.
- Aflați dacă atletul poate obține exact 2018 puncte.

SOLUȚIE:

- La prima parcurgere $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ atletul obține $1 + 2 + 3 = 6$ puncte 1p
 și la fiecare parcurgere următoare $D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ obține câte $4 + 1 + 2 + 3 = 10$ puncte 1p
 După 5 parcurgeri complete $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ obține 46 puncte și este în D 1p
 și continuând ajunge în A cu 50 puncte, în B cu 51 puncte, în C cu 53 puncte 1p
- Atletul aleargă $(5 \cdot P_{ABCD} + 200)m = 2,2Km$ 1p
- Atletul poate obține puncte în una din variantele: $10n; 10n + 1; 10n + 3; 10n + 6$, $n \in \mathbb{N}$ 1p
 și deoarece $2018 = 2010 + 8$, atletul nu poate înregistra 2018 puncte 1p

Problema 4.

Considerăm paralelogramul $ABCD$ și punctele $M \in (DC)$, $N \in (BM)$ astfel încât $DM = 3MC$ și $BN = 4NM$.

- Verificați că $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$.
- Demonstrați că $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- Exprimați vectorul \overrightarrow{AN} în funcție de vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AD} .
- Demonstrați că punctele A, N, C sunt coliniare și calculați valoarea raportului $\frac{AN}{NC}$.

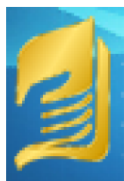
SOLUȚIE:

- \overrightarrow{MC} și \overrightarrow{AB} sunt coliniari și de același sens, deci $\overrightarrow{MC} = \frac{MC}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$ 1p
- $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$ 2p
- $\overrightarrow{BN} = \frac{4}{5} \overrightarrow{BM} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{5} \overrightarrow{AB}$ 1p

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \dots\dots\dots 1p$$

d) $\overrightarrow{AN} = \frac{4}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$, deci A, N, C sunt coliniare 1p

$$\overrightarrow{AN} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{NC}, \text{ deci } \frac{AN}{NC} = 4 \dots\dots\dots 1p$$



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1.

Pentru fiecare $x \in (0; +\infty)$, considerăm numerele $a_n(x) = (\sqrt{x})^{21-n} \cdot (\sqrt[3]{x})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Demonstrați că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n(x)$ nu depinde de x .
- Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ în cazul în care $a_n(3) = 27$.
- Determinați $x \in (0; +\infty)$ în cazul în care $a_{45}(x) = 3$.
- Demonstrați că, pentru o infinitate de valori $x \in (0; +\infty)$, toate numerele $a_n(x)$ sunt raționale.

SOLUȚIE:

- $a_n(x) = x^{\frac{21-n}{2}} \cdot x^{\frac{n}{3}} = x^{\frac{63-n}{6}}$ 1p
pentru $n = 63$, $a_{63}(x) = 1$ nu depinde de x 1p
- $a_n(3) = 27 \Rightarrow \frac{63-n}{6} = 3 \Rightarrow n = 45$ 2p
- $a_{45}(x) = 3 \Rightarrow x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$ 2p
- pentru $x = 2^{6k}$, $(\forall) k \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow a_n(x) \in \mathbb{Q}$ 1p

Problema 2.

Pentru fiecare număr real a definim numărul $z_a = \frac{a+i}{1+a \cdot i}$, unde $i^2 = -1$.

- Demonstrați că $|z_a| = 1$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
- Demonstrați că $z_a \neq -i$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
- Determinați numerele reale a pentru care partea imaginară a numărului z_a este egală cu $-\frac{4}{5}$.
- Calculați produsul $p = z_1 \cdot z_{\frac{1}{2}} \cdot z_{\frac{1}{3}} \cdot \dots \cdot z_{\frac{1}{2018}} \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_{2018}$

SOLUȚIE:

- $|z_a| = \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{1+a^2}} = 1$ 2p
- $z_a = -i \Rightarrow a+i = -i+a$, fals 1p

- c) $z_a = \frac{2a}{1+a^2} + \frac{1-a^2}{1+a^2} \cdot i$ 1p
 $\frac{1-a^2}{1+a^2} = -\frac{4}{5} \Rightarrow a = -3$ sau $a = 3$ 1p
- d) Observăm că $z_{\frac{1}{a}} = \frac{1+ai}{a+i} = \frac{1}{z_a}$, deci $z_{\frac{1}{a}} \cdot z_a = 1, (\forall) a \in \mathbb{R}^*$ 1p
 $\Rightarrow p = 1$ 1p

Problema 3.

Fie numărul real $a = \sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

- a) Verificați $a^3 - 6a - 8 = 0$.
b) Demonstrați că $a \in (\sqrt{6}; 3)$.
c) Demonstrați că numărul $x = \log_2(a^2 - 6) + \log_a\left(\frac{8}{a} + 6\right) + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{a}$ este natural.

SOLUȚIE:

- a) $a^3 = 4 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}(\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}) = 8 + 6a$ 2p
- b) Evident, $a > 0$ și din $8 = a(a^2 - 6) \Rightarrow a > \sqrt{6}$ 1p
Dacă $a \geq 3$, atunci $8 = a(a^2 - 6) \geq 9$, fals 1p
- c) $x = \log_2 \frac{8}{a} + \log_a a^2 + \log_2 a$ 1p
 $x = \log_2 \left(\frac{8}{a} \cdot a\right) + 2$ 1p
 $x = 5$ 1p

Problema 4.

Un program de calculator simulează o traiectorie curbă închisă, de lungime 15cm și pe care două mobile pornesc din același punct dar în sensuri opuse, respectiv cu legile de deplasare date de funcțiile $f(x) = x + 2^x - 1$ și $g(x) = x + \log_2(x+1)$, unde variabila $x \geq 0$ reprezintă momentul măsurat în secunde iar $f(x)$ și $g(x)$ reprezintă distanța parcursă de cele două mobile de la momentul zero al deplasării până la momentul $x \geq 0$, măsurată în centimetri. Vom nota cu M mulțimea momentelor de întâlnire ale celor două mobile. Răspundeți la următoarele cerințe:

- a) Demonstrați că $x \in M$ dacă și numai dacă $(\exists) n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(x) + g(x) = 15n$.
b) Determinați momentul primei întâlniri a celor două mobile.
c) Demonstrați că $x = 2^{68} - 1 \in M$.

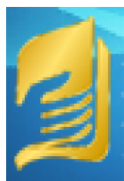
SOLUȚIE:

- a) Considerând $h: [0; +\infty)$, $h(x) = f(x) + g(x)$
 $\Rightarrow h(x) = 2x + 2^x + \log_2(x+1) - 1$ este funcție strict crescătoare, cu $h(0) = 0$ 1p
 \Rightarrow cum lungimea traseului este de 15cm și cele două mobile se deplasează pe traiectorie în sensuri opuse, are loc întâlnirea în fiecare moment $x > 0$ în care $h(x) = 15n$, $n \in \mathbb{N}^*$ 1p
- b) Cum $h(x) = f(x) + g(x)$ este strict crescătoare, cu $h(0) = 0$, prima întâlnire are loc la unicul moment $x > 0$ în care se verifică $h(x) = 15$ 1p
Folosind monotonia, se caută și se găsește $h(3) = 15$, deci $x = 3$ este momentul primei întâlniri 1p

c) $x = 2^{68} - 1 \in M \Leftrightarrow h(2^{68} - 1) = 15n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ 1p

$h(2^{68} - 1) = 2(2^{68} - 1) + 2^{2^{68}-1} + 67$, din care $h(2^{68} - 1) = 2(16^{17} - 1) + 8(16^{(2^{66}-1)} - 1) + 75$ 1p

dar $(16^k - 1):15 \ (\forall) k \in \mathbb{N}$ și implicit $h(2^{68} - 1):15$ 1p

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘICONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

Fie matricea unitate $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- Calculați $B = A - a \cdot I_3$.
- Verificați $B^2 = B + 2I_3$ și $A^2 = (2a+1) \cdot A - (a^2 + a - 2) \cdot I_3$.
- Demonstrați că A este inversabilă pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ și determinați A^{-1} .

SOLUȚIE:

$$\text{a) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{b) } B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B + 2I_3 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$A^2 = (aI_3 + B)^2 = a^2I_3 + 2aB + B^2 = a^2I_3 + 2a(A - aI_3) + (A - aI_3)^2 = \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\dots = (2a+1) \cdot A - (a^2 + a - 2) \cdot I_3 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{c) } \det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \dots = (a+2)(a-1)^2 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow a \notin \{-2; 1\} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Cum } A^2 = (2a+1) \cdot A - (a^2 + a - 2) \cdot I_3, \quad A^{-1} = \frac{2a+1}{a^2 + a - 2} \cdot I_3 - \frac{1}{a^2 + a - 2} \cdot A \dots\dots\dots 1\text{p}$$

Problema 2.

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și determinantul $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$.

Totodată, în sistemul de coordonate (xOy) , considerăm punctele $A_n(n; n^2)$, $n \in \mathbb{Z}$.

- Demonstrați că $D(a, b, c) = (b-a)(c-a)(c-b)$.
- Demonstrați că pentru orice trei numere întregi distincte m, n, k , punctele $A_m(m; m^2)$, $A_n(n; n^2)$, $A_k(k; k^2)$ sunt necoliniare și aria triunghiului $A_m A_n A_k$ este număr natural.
- Demonstrați că aria triunghiului $A_{n-2018} A_n A_{n+2018}$ nu depinde de $n \in \mathbb{Z}$.
- Demonstrați că nici unul din triunghiurile $A_m A_n A_k$, cu $m, n, k \in \mathbb{Z}$, nu are aria egală cu 2.

SOLUȚIE:

- Verificare $D(a, b, c) = \dots = (b-a)(c-a)(c-b)$ 2p
- $S(A_m A_n A_k) = \frac{1}{2} |D(m; n; k)| = \frac{1}{2} |(m-n)(m-k)(n-k)| \in \mathbb{N}$ deoarece din cele trei numere $m, n, k \in \mathbb{Z}$, două au aceeași paritate și astfel diferența lor este număr par, deci $|(m-n)(m-k)(n-k)| : 2$ 2p
- $A_{n-2018} A_n A_{n+2018} = \dots = 2018^3$ care nu depinde de $n \in \mathbb{Z}$ 2p
- Fără a afecta generalitatea, putem considera $m > n > k$ și atunci, în ipoteza $S(A_m A_n A_k) = 2$, am avea $(m-n)(m-k)(n-k) = 4$. Cum $m, n, k \in \mathbb{Z}$ sunt distincte $\Rightarrow m-k > m-n \geq 1$ și $m-k > n-k \geq 1$, rezultând $m-k = 4$ și $m-n = n-k = 1$, imposibil 1p

Problema 3.

Două funcții f, g le numim *a-înrudite*, $a \in \mathbb{R}$, dacă există și este finită limita $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - a \cdot g(x)]$.

- Demonstrați că funcțiile $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1}$ și $g(x) = \frac{x-2}{x-1}$ sunt 2-înrudite.
- Determinați $a \in \mathbb{R}$ încât $f(x) = \frac{\sqrt{4x+5}}{x^2 - x}$ și $g(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}$ să fie a-înrudite.
- Dacă alegem trei funcții f, g, h încât f și g sunt a-înrudite iar g și h sunt b-înrudite, demonstrați că atunci f și h sunt ab-înrudite.

SOLUȚIE:

- $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 2g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1} - \frac{2x - 4}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 2)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{3}{2}$ 2p
- $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - a \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5} - a\sqrt{x}}{(x-1) \cdot x}$ este finită $\Leftrightarrow a = 3$ 1p
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - a \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - 5x}{(x-1) \cdot x(\sqrt{4x+5} + 3\sqrt{x})} = \dots = -\frac{5}{6}$ 2p
- $f(x) - ab \cdot h(x) = f(x) - a \cdot g(x) + a[g(x) - b \cdot h(x)]$ 1p
 deci $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - ab \cdot h(x)]$ există și este finită 1p

Problema 4.

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ încât funcția $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} + cx$ are domeniul maxim \mathbb{R} și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

- Demonstrați că $a = 2$, $b \in [1; +\infty)$ și $c = -1$.
- Demonstrați că toate funcțiile cu această proprietate au aceleași asimptote.
- Demonstrați că nici una din funcțiile obținute nu este funcție rațională.

SOLUȚIE:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} + cx) = 1$ obligă $c = -1$, în caz contrar limita fiind infinită 1p

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{\sqrt{x^2 + ax + b} + x} = \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2 \text{ 1p}$$

$$\text{din } x^2 + ax + b \geq 0, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow b \in [1; +\infty) \text{ 1p}$$

- b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + b} - x$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, fiind elementară, este continuă pe domeniul ei de definiție, deci nu are asimptote verticale și cum $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + b} - x) = 1$, are la $+\infty$ asimptotă orizontală $y = 1$ 1p

Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + b} - x) = +\infty$, f nu are asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + b} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + b} + x}{-x} = -2 \Rightarrow m = -2 \text{ 1p}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + b} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + b} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + b}{\sqrt{x^2 - 2x + b} + x} = -1$$

$$\Rightarrow y = -2x - 1 \text{ asimptotă oblică spre } -\infty \text{ 1p}$$

- c) Dacă $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + b} - x$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ar fi funcție rațională, atunci asimptota spre $+\infty$, $y = 1$, ar fi și asimptotă spre $-\infty$, contradicție cu $y = -2x - 1$ asimptotă oblică spre $-\infty$ 1p

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘICONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Considerăm structura algebrică $(\mathbb{R}; \circ)$ cu legea de compoziție $x \circ y = 3xy - 2x + y - 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

- Demonstrați $(\mathbb{R}; \circ)$ este structură neasociativă.
- Stabiliți dacă $(\mathbb{R}; \circ)$ admite element neutru.
- Rezolvați în $(\mathbb{R}; \circ)$ sistemul
$$\begin{cases} (x-1) \circ y = 9 \\ (x+1) \circ (y-1) = 13 \end{cases}$$

SOLUȚIE:

- Structura este neasociativă dacă are loc $(x \circ y) \circ z \neq x \circ (y \circ z)$, măcar într-o situație particulară 1p
Verificare particulară, spre exemplu $(0 \circ 1) \circ 2 \neq 0 \circ (1 \circ 2)$ 1p
- Dacă $e \in \mathbb{R}$ este element neutru, $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ și atunci
 $x \circ e = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 1$ 1p
 $e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3ex - 2e + x - 1 = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ și împreună cu $e = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 1$ $(\forall) x \in \mathbb{R}$ (!!!) contradicție, deci $(\mathbb{R}; \circ)$ nu admite element neutru. 1p
- $(x-1) \circ y = 9 \Leftrightarrow 3xy - 2y - 2x = 8$ 1p
 $(x-1) \circ y = 9 \Leftrightarrow 3xy + 4y - 5x = 20$ 1p
Soluții $(x; y) = (2; 3)$ și $(x; y) = (-4; 0)$ 1p

Problema 2.

Fie matricele $X(a) = a \cdot A + I_2$, cu $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și considerăm mulțimea $G = \{X(a) / a > -1\}$.

- Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ se verifică $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$.
- Demonstrați că G împreună cu operația de înmulțire a matricelor este grup comutativ.
- Calculați produsul $X\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot X\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \dots \cdot X\left(-\frac{2017}{2018}\right) \cdot X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(2018)$.

SOLUȚIE:

- a) $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a+b)A + abA^2$, dar $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = A$ și se confirmă $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$ 1p
- b) Înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G , deoarece din $a > -1$ și $b > -1$ se obține $(a+1)(b+1) > 0$, din care $a+b+ab > -1$ 1p
 Înmulțirea matricelor din $M_2(\mathbb{R})$ este asociativă iar $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$ arată că în G înmulțirea este și comutativă 1p
 $I_2 = X(0) \in G$ este element neutru 1p
 pentru $a > -1$, $[X(a)]^{-1} = X\left(\frac{-a}{a+1}\right) \in G$ 1p
- c) Cum $X(a) \cdot X\left(\frac{-a}{a+1}\right) = I_2$, folosind comutativitatea și asociativitatea, produsul devine 1p
 $\left[X(1) \cdot X\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \cdot \left[X(2) \cdot X\left(-\frac{2}{3}\right)\right] \cdot \dots \cdot \left[X(2017) \cdot X\left(-\frac{2017}{2018}\right)\right] \cdot X(2018) = X(2018)$ 1p

Problema 3.

Considerăm funcția $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

- a) Calculați $\int f(x) dx$.
- b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f verifică $F(2) < F(3)$.
- c) Demonstrați că funcția $g: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |f(x)|$, admite primitive și determinați, din mulțimea primitivelor ei, acea primitivă G care verifică $G(1) = 0$.

SOLUȚIE:

- a) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$ 3p
- b) $F'(x) = f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} > 0$ pentru $x > 1$, deci F este crescătoare pe $(1; +\infty)$ 1p
 și astfel $F(2) < F(3)$ 1p
- c) $g(x) = \begin{cases} -\frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x \in (0; 1) \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x \in [1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow G(x) = \begin{cases} -2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C_1, & x \in (0; 1) \\ 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C_2, & x \in [1; +\infty) \end{cases}$ 1p
 G derivabilă, $G(1) = 0 \Rightarrow C_1 = -4, C_2 = 4$ 1p

Problema 4.

Rata de descreștere a unei populații de bacterii de pe o plantă, după t zile de la administrarea de insecticid, este dată de formula $B'(t) = \frac{-3000}{(1+0,2t)^2}$, $t \geq 0$. Dacă numărul inițial al bacteriilor a fost de 8.000, aflați după câte zile numărul bacteriilor va fi cel mult egal cu 500.

SOLUȚIE:

a) $B(t) = -3000 \cdot \int \frac{1}{(1+0,2t)^2} dt \dots\dots\dots 2p$

$$B(t) = -\frac{3000}{0,2} \cdot \int \frac{0,2}{(1+0,2t)^2} dt = \frac{15.000}{1+0,2t} + C \dots\dots\dots 2p$$

$$t=0 \Rightarrow B(0) = 15000 + C = 8000 \Rightarrow C = -7000 \dots\dots\dots 1p$$

$$B(t) = \frac{15.000}{1+0,2t} - 7000 \leq 500 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{din care } t \geq 5 \dots\dots\dots 1p$$