MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX -a

Problema 1.
Suma a trei numere este 100.Ştiind că primul număr este 40% din al doilea iar al treilea număr este 150% din primul număr, determinați cele trei numere.

Problema 2.

a) Fie D mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.

b) Folosind, eventual, punctul anterior, să se demonstreze că $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Problema 3.
Pe dreapta (d) se iau în ordine punctele $M, M_0, M_1, ..., M_n$, astfel încât $MM_0 = 1\text{cm}$, $M_0M_1 = 3\text{ cm}$, $M_1M_2 = 3^2\text{ cm}$ etc. (fiecare segment este de trei ori mai mare decât segmentul dinaintea lui).Să se determine lungimea segmentului MM_{2018}.

Problema 4.
Fie $a_n = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$; $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $a_8 = \dfrac{2}{3}$.

b) Demonstrați că $a_n > 1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

c) Determinați $n \le 15$ astfel încât $a_n \in \mathbb{Q}$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X-a

Problema 1.
a) Verificaţi egalitatea $z \cdot \bar{z} = |z|^2, (\forall) z \in \mathbb{C}$.
b) Determinaţi $k > 0$ astfel încât $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = k(|z_1|^2 + |z_2|^2), (\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
c) Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = 1, |z_2| = 1$ şi $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$, să se determine $|z_1 - z_2|$.

Problema 2.
Pentru $x > 1$, notăm cu $S_n(x) = x^{-1} + x^{-2} + \cdots + x^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$.
a) Calculaţi $(1 - x) \cdot S_n(x)$.
b) Deduceţi $x^{-1} + x^{-2} + \cdots + x^{-n} = \frac{x^n - 1}{x^n(x-1)}, (\forall) x > 1$.
c) Folosind, eventual, punctul anterior, să se demonstreze că $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{3} < 3, (\forall) n \geq 1$.

Problema 3.
Avem la dispoziție un număr nelimitat de jetoane pe care sunt scrise numerele 5, 7 sau 11. Un număr $n \in \mathbb{N}^*$ se numește „norocos” dacă găsim un număr de jetoane astfel încât suma numerelor scrise pe ele să fie egal cu n.
a) Demonstrați că numărul 13 nu este „norocos”.
b) Demonstrați că numerele: 14, 15, 16 și 18 sunt „norocoase”.
c) Demonstrați că orice număr natural $n \geq 14$ este „norocos”.

Problema 4.
La un concurs de atletism participă liceele A, B, C, fiecare liceu cu câte 3 elevi. Punctajul final al fiecărui liceu se calculează adunând punctele obținute de elevii liceului respectiv. Elevul sosit pe locul $k(k = \overline{1,9})$ i se acordă $\frac{10}{k}$ puncte. Juriul concursului a constatat următoarele condiții îndeplinite simultan:
i. Oricare doi elevi nu au sosit în același timp.
ii. Primele trei locuri au fost ocupate de elevi de la licee diferite.
iii. Elevii liceului C au sosit unul după altul.
iv. Fiecare elev de la liceul B avea chiar în fața sa un elev de la liceul A.
Care este clasamentul final al celor trei licee în funcție de punctajul obținut de fiecare dintre ele?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI -a

Problema 1.

a) Calculați $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+9}{x^2+5x+3}\right)^x$.

b) Determinați $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+3}-\sqrt{3x^2+x+5}-mx-n\right)=0.$

Problema 2.

Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

a) Calculați A^2 și $\det(A)$.

b) Dacă $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ și $\det(X)=0$, demonstrați că $X^2=(a+d)\cdot X$.

c) Rezolvați ecuația $X^{2018}=A$.

Problema 3.

Să se rezolve ecuația $\Delta(x)=0$, unde: $\Delta(x)=\begin{vmatrix}x^2 & x^4 & 16\\ x^2+1 & x^4+1 & 17\\ x^2+x & x^4+x^2 & 20\end{vmatrix}$.

(Se vor folosi proprietățile determinanților)

Problema 4.

Doi prieteni, Cristian și Andrei, măsoară fiecare distanța de acasă până la școală. Distanța măsurată de Cristian este egală cu x km, iar cea măsurată de Andrei este egală cu y km. Știind că există $a,b,c\in\{1,2,3\}$, nu neapărat distincte astfel încât să fie verificat sistemul: $\begin{cases}x+2y=4\\ ax+y=5\\ cx+3y=b+6\end{cases}$, determinați a,b,c și distanțele x și y.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII-a

Problema 1.

Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1; \, x \le 1 \\ x^3 + x^2 - 4x + b; \, x > 1 \end{cases}$ să fie o primitivă pentru o funcție $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f = f(x)$. Determinați apoi funcția f.

Problema 2.

Calculați $I(x) = \int \frac{x \cdot e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \, x \in (-1, 1)$.

Problema 3.

Considerăm mulțimea $G = \left\{ A(x) \in M_3(\mathbb{R}), \, A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2x^2 + 3x & 2x & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$.

b) Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

c) Demonstrați că grupul $(\mathbb{R}, +)$ este izomorf cu grupul $(G, \cdot)$.

d) Calculați $\left(A(x)\right)^{2018}$.

Problema 4.

Fie M o mulțime nevidă și „$*$” o lege de compoziție pe M. Spunem că elementul $d \in M$ este „*destroyer*” pentru operația „$*$” dacă $d * x = x * d = d, (\forall), x \in M$. Pentru $a, b \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ fixate, definim pe $\mathbb{R}$ operația „$*$” prin $x * y = bxy + abx + aby + a^2 b - a, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că operația „$*$” este asociativă și admite element „*destroyer*”.

b) Demonstrați că $E = (-2018a) * (-2017a) * \ldots * (-a) * 0 * a * \ldots * (2017a) * (2018a) < 0$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*