MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a IX –a

Problema 1.
Calculați $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{2018}]$.

Problema 2.
Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + ax - 3a$, unde $a \in \mathbb{R}$.
a) Demonstrați că dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x \cdot y = 3(x + y)$, atunci $(x - 3)(y - 3) = 9$.
b) Știind că rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ sunt două numere întregi distincte, determinați valorile lui a.

Problema 3.
În paralelogramul $ABCD$ se consideră $F \in [AB], M -$ mijlocul segmentului $[AD]$, $N -$ mijlocul segmentului$[BC]$, $G -$mijlocul segmentului$[BM]$, iar $AF = 2FB$.
a) Demonstrați că punctele D, G, F sunt coliniare.
b) Demonstrați că $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DF}$.

Problema 4.
La ora 6:00, din același depozit A, pleacă doi curieri către alte două depozite B și C, unde distanța de la A la B este egală cu distanța de la B la C și egală cu distanța de la A la C. Primul curier merge mai întâi la depozitul B, cu o viteză constantă x km/h, iar de la depozitul B la depozitul C merge cu o viteză de 3 ori mai mare. Al doilea curier merge mai întâi la depozitul C, cu o viteză constantă de 30 km/h, iar de la depozitul C la depozitul B merge cu o viteză constantă de $x + 42$ km/h. Știind că nici unul nu face pauză, iar ambii ajung la destinație la ora 9:00, determinați ora aproximativă la care s-au întâlnit cei doi curieri pe traseu.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a X –a

Problema 1.

Studiind virusul gripal tip B, un cercetător a stabilit că acesta se răspândeşte după legea $f(t)=1-e^{-0,5t}$, unde *f(t)* reprezintă procentul din populaţie care a venit în contact cu boala, iar *t* este numărul de săptămâni trecute de la semnalarea primului caz. În a câta săptămâna va fi infectată trei sferturi din populaţie?

Problema 2.

Fie numărul $a=\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$.

a) Verificați relația $a^3=18a+108$

b) Arătați că $a\in\mathbb{Q}$

Problema 3.

Fie $x_i\in[10,100]$, $i=\overline{1,10}$.

Să se arate ca $(\lg x_1+\lg x_2...+\lg x_{10})(\log_{x_1}10+\log_{x_2}10+...+\log_{x_{10}}10)\leq 112,5$

Problema 4.

Se da funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, $f(n)=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

a) Arătați ca f este periodica.

b) Calculați $(1-f(1))\cdot(1+f(2))\cdot(1-f(3))\cdot...\cdot(1+f(2018))$

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a XI –a

Problema 1.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to[-1,+\infty),\ f(x)=\begin{cases} x^2+2x+a, & x\le 1 \\ x+2, & x>1 \end{cases}$.

a) Demonstraţi că $a\ge 0$.
b) Pentru $a=0$, trasaţi graficul funcţiei.
c) Arătaţi că funcţia *f* este continuă dacă şi numai dacă este surjectivă.

Problema 2.

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Determinaţi matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $XA=AX$.

b) Rezolvaţi în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuaţia $X^3=A$.

Problema 3.

Determinaţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\sqrt{x^2+1}$.

Problema 4.

Matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ are determinantul egal cu 1.

a) Schimbând între ele două dintre elementele lui *A*, putem obţine o matrice *B* al cărei determinant să fie egal cu 0?
b) Schimbând între ele două dintre elementele lui *A*, putem obţine o matrice *C* al cărei determinant să fie egal cu -1?
c) Schimbând între ele două dintre elementele lui *A*, putem obţine o matrice *D* al cărei determinant să aibă o altă valoare decât 0, 1 sau -1?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ 10 martie 2018

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a XII –a

Problema 1.

Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ construim legile de compoziție $*$ și $\circ$ definite prin: $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=xy-3x-3y+12,\ x,y\in\mathbb{Z}$

a) Justificați că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este inel comutativ.

b) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 2018 ori } x}=2^{2018}+3$.

c) Să se afle $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât intre inelele $(\mathbb{Z},*,\circ)$ și $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=ax+b$.

Problema 2.

Fie $\mathcal{M}$ mulțimea secvențelor de 8 litere majuscule din alfabetul latin (care are 26 de litere: A, B, C, ..., Z). Definim pe $\mathcal{M}$ legea de compoziție # astfel: dacă $x=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7\lambda_8\in\mathcal{M}$ și $x=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6\gamma_7\gamma_8\in\mathcal{M}$, atunci $x\#y=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\gamma_6\gamma_7\gamma_8$.

a) Aflați cardinalul mulțimii $\mathcal{M}$.

b) Calculați (PARAGUAY # COLUMBIA) # BRAZILIA

c) Cercetați dacă legea # este comutativă și dacă admite element neutru.

Problema 3.

a) Arătați că: $\int\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx=\frac{1}{2}arctg\left(e^{2x}\right)+C$

b) Aflați primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\left(1+e^{x}\right)^4}{1+e^{4x}}$

Problema 4.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și F o primitivă a sa.

Dacă $F(x)\cdot f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ și $F(0)=1$ să se afle f.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*