MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

Problema 1.

Considerăm progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = 2n-1$, $n\in\mathbb{N}^*$ și progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = 2^{2n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ încât $a_1+a_2+a_3+...+a_n = 2018^2$.

b) Demonstrați că rezultatul calculului $b_{n+1}-3(b_1+b_2+...+b_n)$ nu depinde de $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $b_n \geq 1+a_n$.

Problema 2.

Spunem că perechea de numere naturale nenule $(m;n)$ este *interesantă* dacă $0,(3) < \frac{m}{n} < 0,34$.

a) Stabiliți dacă perechea $(330;1000)$ este interesantă.

b) Determinați valorile posibile ale lui n astfel încât perechea $(330;n)$ să fie interesantă.

c) Aflați câte perechi de numere interesante de forma $(m;1000)$ sunt.

d) Determinați m și n astfel încât perechea $(m;n)$ să fie interesantă și m să aibă valoare minimă.

Problema 3.

Un atlet aleargă în jurul unui teren de formă dreptunghiulară $ABCD$ cu lungimea de $150m$ și lățimea de $50m$, pe traseul $A\to B\to C\to D\to A\to B\to ...$ și fără a-și schimba sensul de alergat.

El pleacă din A cu zero puncte și de fiecare dată când ajunge într-unul din vârfurile $B,C,D,A,B,C,...$ primește puncte după următoarea regulă: câte 1 punct în B; câte 2 puncte în C; câte 3 puncte în D; câte 4 puncte în A.

a) Aflați în ce punct s-a aflat atletul în momentul în care a înregistrat 53 de puncte.

b) Determinați câți kilometri a parcurs atletul de la momentul plecării până când a înregistrat 53 de puncte.

c) Aflați dacă atletul poate obține exact 2018 puncte.

Problema 4.

Considerăm paralelogramul $ABCD$ și punctele $M\in(DC)$, $N\in(BM)$ astfel încât $DM = 3MC$ și $BN = 4NM$.

a) Verificați că $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

b) Demonstrați că $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

c) Exprimați vectorul $\overrightarrow{AN}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$.

d) Arătați că punctele A,N,C sunt coliniare și calculați valoarea raportului $\frac{AN}{NC}$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

Problema 1.

Pentru fiecare $x\in(0;+\infty)$, considerăm numerele $a_n(x)=\left(\sqrt{x}\right)^{21-n}\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n(x)$ nu depinde de x.

b) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ în cazul în care $a_n(3)=27$.

c) Determinați $x\in(0;+\infty)$ în cazul în care $a_{45}(x)=3$.

d) Demonstrați că pentru o infinitate de valori $x\in(0;+\infty)$ șirul $a_n(x)$ are toți termenii numere raționale.

Problema 2.

Pentru fiecare număr real a definim numărul $z_a=\dfrac{a+i}{1+a\cdot i}$, unde $i^2=-1$.

a) Demonstrați că $|z_a|=1$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $z_a\neq -i$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

c) Determinați numerele reale a pentru care partea imaginară a numărului z_a este egală cu $-\dfrac{4}{5}$.

d) Calculați produsul $p=z_1\cdot z_{\frac{1}{2}}\cdot z_{\frac{1}{3}}\cdot\ldots\cdot z_{\frac{1}{2018}}\cdot z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot\ldots\cdot z_{2018}$.

Problema 3.

Fie numărul real $a=\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

a) Verificați $a^3-6a-8=0$.

b) Demonstrați că $a\in\left(\sqrt{6};\,3\right)$.

c) Demonstrați că numărul $x=\log_2\left(a^2-6\right)+\log_a\left(\dfrac{8}{a}+6\right)+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{a}$ este natural.

Problema 4.

Un program de calculator simulează o traiectorie curbă închisă, de lungime $15\,cm$ și pe care două mobile pornesc dir acelaşi punct dar în sensuri opuse, respectiv cu legile de deplasare date de funcțiile $f(x)=x+2^x-1$ ş $g(x)=x+\log_2(x+1)$, unde variabila $x\geq 0$ reprezintă momentul măsurat în secunde iar $f(x)$ şi $g(x)$ reprezintă distanța parcursă de cele două mobile de la momentul zero al deplasării până la momentul $x\geq 0$, măsurată în centimetri Vom nota cu M mulțimea momentelor de întâlnire ale celor două mobile. Răspundeți la următoarele cerințe:

a) Demonstrați că $x\in M$ dacă și numai dacă $(\exists)n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $f(x)+g(x)=15n$.

b) Determinați momentul primei întâlniri a celor două mobile.

c) Demonstrați că $x=2^{68}-1\in M$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

Problema 1.

Fie matricea unitate $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $B = A - a \cdot I_3$.

b) Verificați $B^2 = B + 2I_3$ și $A^2 = (2a+1) \cdot A - (a^2 + a - 2) \cdot I_3$.

c) Demonstrați că A este inversabilă pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ și determinați A^{-1}.

Problema 2.

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și determinantul $D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$.

Totodată, în sistemul de coordonate (xOy), considerăm punctele $A_n(n; n^2)$, $n \in \mathbb{Z}$.

a) Demonstrați că $D(a,b,c) = (b-a)(c-a)(c-b)$.

b) Demonstrați că pentru orice trei numere întregi distincte m, n, k, punctele $A_m(m; m^2)$, $A_n(n; n^2)$, $A_k(k; k^2)$ sunt necoliniare și aria triunghiului $A_m A_n A_k$ este număr natural.

c) Demonstrați că aria triunghiului $A_{n-2018} A_n A_{n+2018}$ nu depinde de $n \in \mathbb{Z}$.

d) Demonstrați că nici unul din triunghiurile $A_m A_n A_k$, cu $m, n, k \in \mathbb{Z}$, nu are aria egală cu 2.

Problema 3.

Două funcții f, g le numim *a-înrudite*, $a \in \mathbb{R}$, dacă există și este finită limita $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) - a \cdot g(x)]$.

a) Demonstrați că funcțiile $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1}$ și $g(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ sunt *2-înrudite.*

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ încât $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+5}}{x^2 - x}$ și $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x}}$ să fie *a-înrudite.*

c) Dacă alegem trei funcții f, g, h încât f și g sunt *a-înrudite* iar g și h sunt *b-înrudite*, demonstrați că atunci f și h sunt *ab-înrudite.*

Problema 4.

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ încât funcția $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} + cx$ are domeniul maxim $\mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

a) Demonstrați că $a = 2$, $b \in [1; +\infty)$ și $c = -1$.

b) Demonstrați că toate funcțiile cu această proprietate au aceleași asimptote.

a) Arătați că nici una din funcțiile obținute nu este funcție rațională.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

Problema 1.

Considerăm structura algebrică $(\mathbb{R};\circ)$ cu legea de compoziție $x\circ y=3xy-2x+y-1$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

a) Demonstrați $(\mathbb{R};\circ)$ este structură neasociativă.

b) Stabiliți dacă $(\mathbb{R};\circ)$ admite element neutru.

c) Rezolvați în $(\mathbb{R};\circ)$ sistemul $\begin{cases}(x-1)\circ y=9\\(x+1)\circ(y-1)=13\end{cases}$

Problema 2.

Fie matricele $X(a)=a\cdot A+I_2$, cu $a\in\mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix}-2&1\\-6&3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și considerăm mulțimea $G=\{X(a)/a>-1\}$.

a) Demonstrați că pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$ se verifică $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$.

b) Demonstrați că G împreună cu operația de înmulțire a matricelor este grup comutativ.

c) Calculați produsul $X\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot X\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(-\frac{2017}{2018}\right)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(2018)$.

Problema 3.

Considerăm funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Calculați $\int f(x)dx$.

b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f verifică $F(2)<F(3)$.

c) Demonstrați că funcția $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=|f(x)|$, admite primitive și determinați, din mulțimea primitivelor ei, acea primitivă G care verifică $G(1)=0$.

Problema 4.

Rata de descreștere a unei populații de bacterii de pe o plantă, după t zile de la administrarea de insecticid, este dată de formula $B'(t)=\frac{-3000}{(1+0,2t)^2}$, $t\geq 0$. Dacă numărul inițial al bacteriilor a fost de 8.000, aflați după câte zile numărul bacteriilor va fi cel mult egal cu 500.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*