COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 2009

CLASA a VII-a

1. Determinați mulțimea $A = \left\{ \overline{abc} \,\middle|\, \sqrt{\overline{abc} - \sqrt{c}} \in \mathbb{N},\ a,b,c \text{ cifre distincte} \right\}$.

2. a) Găsiți tripletele de numere întregi (x, y, z) pentru care

$$\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(y+2)^2} + \sqrt{(z+3)^2} = 1 .$$

b) Aflați câte triplete de numere întregi (x, y, z) verifică relația

$$\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(y+2)^2} + \sqrt{(z+3)^2} = 2009 .$$

3. In triunghiul ABC avem: $m(\widehat{B})=105^\circ$, $m(\widehat{C})=30^\circ$, $[AD]$ mediană, $[AE]$ bisectoare, cu $D, E \in [BC]$, iar $[BF]$ este înălțime, cu $F \in [AC]$.

a) Arătați că triunghiul AFD este isoscel. **b**) Aflați $m(\widehat{DAE})$.

4. Pe laturile (AB), (BC), (CD), (DA) ale pătratului $ABCD$ se consideră respectiv punctele M, N, P, Q.

a) Dacă dreptele MP și NQ sunt perpendiculare și M', N' sunt proiecțiile punctelor M și N pe laturile (CD), respectiv (AD), arătați că $\Delta MPM'$ și $\Delta NQN'$ sunt congruente.

b) Dacă $AM + CP = BN + DQ$, arătați că dreptele MP și NQ sunt perpendiculare

Subiect elaborat de Sergiu Prisacariu

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 2009

CLASA a VIII-a

1. Aflați numerele raționale a și b, știind că $\dfrac{a}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \dfrac{b}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

2. Determinați numerele naturale n pentru care $\sqrt{n^2+8n+37} \in \mathbb{Q}$.

3. Arătați că dacă $a, b, c, d \in (0;\ +\infty)$ sunt astfel încât $a \cdot b = c \cdot d = 10$, atunci are loc inegalitatea $(a+2)(b+2)(c+5)(d+5) \geq 1600$.

4. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are muchia de lungime 4cm. Punctele M și N se află pe muchiile AA', respectiv CC', astfel încât $A'M = CN = 1$cm.

a) Calculați aria totală a piramidei $ACD'B'$.

b) Calculați lungimea segmentului MN.

c) Demonstrați că punctele B, N, D' și M sunt coplanare.

Subiect elaborat de Alice Anița