Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră numere naturale impare $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2012}$. Demonstraţi că numărul $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2012}^2 - 1}$ este iraţional.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră numerele reale strict pozitive a, b şi c cu proprietatea că $a^2 + ab + ac - bc = 0$.

a) Arătaţi că dacă două dintre numerele a, b şi c sunt egale, atunci cel puţin unul dintre cele trei numere este iraţional.

b) Arătaţi că există o infinitate de triplete de numere naturale nenule (m, n, p) cu proprietatea că $m^2 + mn + mp - np = 0$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Se consideră punctele $M, N \in (BC)$, $Q \in (AB)$ şi $P \in (AC)$ astfel încât $MNPQ$ este dreptunghi. Demonstraţi că dacă centrul dreptunghiului $MNPQ$ coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC atunci $AB = AC = 3AP$.

Problema 4. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctul E pe latura AB. Dreapta DE intersectează dreapta BC în punctul F, iar dreapta CE intersectează dreapta AF în punctul G. Demonstraţi că dreptele BG şi DF sunt perpendiculare.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE-CLASA a 7-a
Varianta 2

Problema 1. Arătaţi că oricare ar fi numărul natural nenul n, numărul $\sqrt{n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]}$ este iraţional.

(Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a.)

Gazeta Matematică

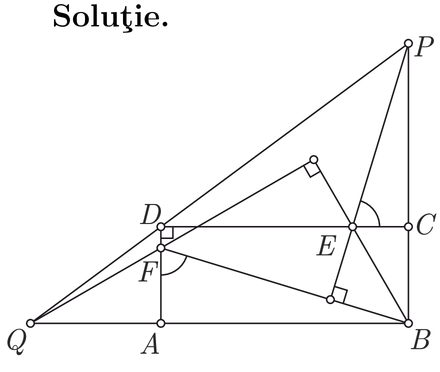
Soluţie. $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=k$, k număr natural, $k\leq\sqrt{n}+\frac{1}{2}<k+1$ .... 2 puncte
$k-\frac{1}{2}>0$ .... 1 punct
$(k-\frac{1}{2})^2\leq n<(k+\frac{1}{2})^2$ .... 1 punct
$k^2+\frac{1}{4}\leq n+k<k^2+2k+\frac{1}{4}$ .... 1 punct
$k^2<n+[\sqrt{n}+\frac{1}{2}]<(k+1)^2$ .... 1 punct
numărul din enunţ este iraţional .... 1 punct

Problema 2. Determinaţi perechile de numere întregi (a,b) care au proprietatea că a^2+2b^2+2a+1 este divizor al lui $2ab$.

Soluţie. $(0,b)$ şi $(a,0)$ sunt soluţii pentru orice a,b întregi .... 1 punct
(a,b) este soluţie dacă şi numai dacă $(a,-b)$ este soluţie,
reducere la cazul $ab>0$ .... 1 punct
$a^2+2b^2+2a+1\leq 2ab$ .... 1 punct
$(a-2b)^2+(a+2)^2\leq 2$ .... 1 punct
$|a+2|\leq\sqrt{2}, |a-2b|\leq\sqrt{2}, a\in\{-3,-2,-1\}$,
$(a,b)\in\{(-3,-2);(-3,-1);(-1,-1)\}$ (după verificări) .... 2 puncte
$S_1=\{(-3,-2);(-3,-1);(-1,-1);(-3,2);(-3,1);(-1,1)\}$,
$S_2=\{(a,0)|a\in\mathbb{Z}\}\cup\{(0,b)|b\in\mathbb{Z}\}$, $S=S_1\cup S_2$ .... 1 punct

Problema 3. Fie dreptunghiul $ABCD$ şi punctele arbitrare $E\in(CD)$ şi $F\in(AD)$. Perpendiculara din punctul E pe dreapta FB intersectează dreapta BC în punctul P şi perpendiculara din punctul F pe dreapta EB intersectează dreapta AB în punctul Q. Să se arate că punctele P,D şi Q sunt coliniare.

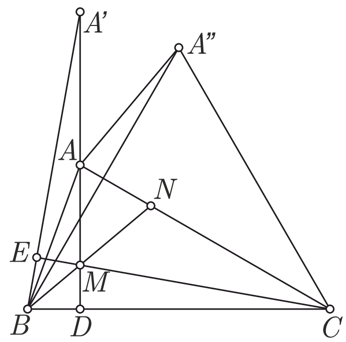
Soluţie.



$\widehat{FQA}\equiv\widehat{EBC}$ (au acelaşi complement, $\widehat{EBQ}$) . 1 punct
$\triangle EBC\sim\triangle FQA$ (U.U.), $\frac{EC}{FA}=\frac{BC}{QA}$ .... 1 punct
$\widehat{PEC}\equiv\widehat{BFA}$ (au acelaşi complement, $\widehat{ABF}$)..1 punct
$\triangle PEC\sim\triangle BFA$ (U.U.), $\frac{PC}{AB}=\frac{EC}{FA}$ ....1 punct
$DC=AB, AD=BC, \frac{PC}{AB}=\frac{EC}{FA}=\frac{BC}{QA}$ .... 1 punct
$\triangle PCD\sim\triangle DAQ$ (L.U.L.)($m(\widehat{PCD})=m(\widehat{DAQ})=90°, \frac{PC}{DA}=\frac{DC}{QA}$)................................1 punct
$m(\widehat{PDQ})=m(\widehat{PDC})+90°+m(\widehat{ADQ})=180°$,
$m(\widehat{ADQ})=m(\widehat{CPD})$, P,D,Q coliniare........1 punct

Problema 4. Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 80°$ şi $m(\widehat{C}) = 30°$. Considerăm punctul M interior triunghiului ABC astfel încât $m(\widehat{MAC}) = 60°$ şi $m(\widehat{MCA}) = 20°$. Dacă N este intersecţia dreptelor BM şi AC să se arate că $(MN$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$.

Soluţie.



$AM \cap BC = \{D\}, AD \perp BC, BE \perp CM, M \in (EC), BE \cap AM = \{A'\}$,
$\triangle BAA'$ isoscel $(m(\widehat{ABA'}) = m(\widehat{AA'B}) = 10°)$ .... 1 punct
Fie A'' cu $\triangle BCA''$ echilateral, CA bisectoarea unghiului $\widehat{BCA''}$ .... 2 puncte
CA mediatoarea lui $[BA'']$, A egal depărtat de B şi A'',
$\triangle BAA''$ isoscel $(m(\widehat{ABA''}) = m(\widehat{AA''B}) = 10°)$ .... 2 puncte
$\triangle BAA' \equiv \triangle BAA''$ (U.L.U), $BA' = BA''$ .... 1 punct
$\triangle BDA' \equiv \triangle BEC$ (I.U.), $BD = BE$,
B se află pe bisectoarea lui $m(\widehat{AMC})$ .... 1 punct