

Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Societatea de Științe Matematice din România



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie a și b două numere reale strict pozitive diferite, cu proprietatea că numerele $a - \sqrt{ab}$ și $b - \sqrt{ab}$ sunt raționale. Arătați că numerele a și b sunt raționale.

Gazeta Matematică

Problema 2. Piramida $VABCD$ are ca bază dreptunghiul $ABCD$, iar muchiile laterale sunt congruente. Demonstrați că planul (VCD) formează unghiuri congruente cu planele (VAC) și respectiv (BAC) dacă și numai dacă unghiurile $\sphericalangle VAC$ și $\sphericalangle BAC$ sunt congruente.

Problema 3. Fie numerele reale strict pozitive a, b, c . Determinați cel mai mare număr întreg n cu proprietatea că

$$\frac{1}{ax + b + c} + \frac{1}{a + bx + c} + \frac{1}{a + b + cx} \geq \frac{n}{a + b + c},$$

pentru orice $x \in [0, 1]$.

Problema 4. Se consideră un tetraedru $ABCD$ în care $AD \perp BC$ și $AC \perp BD$. Notăm cu E și F proiecțiile punctului B pe dreptele AD și AC , respectiv. Fie M mijlocul segmentului AB și fie N mijlocul segmentului CD . Arătați că $MN \perp EF$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 martie 2018

CLASA a VIII-a - Soluții și barem

Varianta 2

Problema 1. Arătați că, dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\left\{ \frac{m}{n} \right\} + \left\{ \frac{n}{m} \right\} \neq 1.$$

Gazeta Matematică

Soluție. Presupunând prin absurd că există $m, n \in \mathbb{N}^*$, astfel ca $\left\{ \frac{m}{n} \right\} + \left\{ \frac{n}{m} \right\} = 1$ reiese $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} - \left[\frac{m}{n} \right] - \left[\frac{n}{m} \right] \in \mathbb{N}$, deci $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$ și, simplificând fracțiile, putem presupune $(m, n) = 1$ **1p**

Dacă $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = k \in \mathbb{N}$, atunci $n^2 - knm + m^2 = 0$ **1p**

Din relația precedentă rezultă că $m \mid n^2$ și $n \mid m^2$, ceea ce, ținând cont de $(m, n) = 1$, implică $m = n = 1$. Dar, pentru $m = n = 1$ expresia din enunț este egală cu 0, deci am obținut o contradicție **5p**

Problema 2. Fie $a, b, c \in [1, \infty)$. Demonstrați că

$$\frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a} + \frac{3}{2} \leq a + b + c.$$

Soluție. Din inegalitatea mediilor avem $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ și analogele, de unde rezultă $\frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a} + \frac{3}{2} \leq \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2} + \frac{3}{2}$ **3p**

Vom arăta că $\sqrt{a} \leq 2a - 1$ pentru orice $a \geq 1$. Într-adevăr, relația precedentă este echivalentă cu $(2\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} - 1) \geq 0$, relație evidentă pentru orice $a \geq 1$ **2p**

Din inegalitatea de mai sus și analogele ei obținem că $\frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2} + \frac{3}{2} \leq a + b + c$ **2p**

Problema 3. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$. Notăm cu M, N și P mijloacele muchiilor $[AB], [BC]$, respectiv $[BB']$. Fie $\{O\} = A'N \cap C'M$.

a) Arătați că punctele D, O, P sunt coliniare.

b) Arătați că $MC' \perp (A'PN)$ dacă și numai dacă $ABCD A' B' C' D'$ este cub.

a) $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul BAC , deci $MN \parallel AC$ și $MN = \frac{1}{2}AC$. Cum $AC \parallel A'C'$ și $AC = A'C'$, rezultă că $MNC'A'$ este trapez și că $\frac{MO}{OC'} = \frac{NO}{OA'} = \frac{1}{2}$. Dacă notăm $\{O'\} = DP \cap MC'$, analog se arată că $MPDC'$ este trapez și $\frac{MO'}{O'C'} = \frac{MP}{DC'} = \frac{1}{2}$. Rezultă că punctele O și O' împart segmentul $[MC']$ în raport $1/2$, deci coincid. Așadar punctele D, O, P sunt coliniare. **2p**

b) Notăm $AB = 2x, BC = 2y, BB' = 2z$. $C'M \perp (A'PN) \Leftrightarrow C'M \perp A'N$ și $C'M \perp DP$. Aplicăm succesiv teorema lui Pitagora. În $\triangle C'BC, \triangle C'BM, \triangle A'BA,$

$\triangle A'BN, \triangle DBA, \triangle DBP, \triangle BMN, \triangle DAM$ obținem $OM^2 = \frac{1}{9}C'M^2 = \frac{1}{9}(4z^2 + 4y^2 + x^2)$, $ON^2 = \frac{1}{9}A'N^2 = \frac{1}{9}(4z^2 + 4x^2 + y^2)$, $OD^2 = \frac{4}{9}DP^2 = \frac{4}{9}(4y^2 + 4x^2 + z^2)$, $MN^2 = x^2 + y^2$, $DM^2 = 4y^2 + x^2$. Din $C'M \perp A'N$ rezultă că $\triangle MNO$ este dreptunghic în O și, prin aplicarea teoremei lui Pitagora, $MN^2 = MO^2 + ON^2$ ceea ce conduce la $x^2 + y^2 = 2z^2$ (*). La fel, din $C'M \perp DP$, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul MDO avem $DM^2 = DO^2 + OM^2$, ceea ce ne conduce la relația $x^2 + z^2 = 2y^2$ (**). Din (*) și (**) rezultă $x = y = z$, de unde rezultă că $ABCD A' B' C' D'$ este cub.

Problema 4. a) Considerăm numerele naturale nenule a, b, c astfel încât $a < b < c$ și $a^2 + b^2 = c^2$. Demonstrați că dacă $a_1 = a^2, a_2 = ab, a_3 = bc, a_4 = c^2$, atunci $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_4^2$ și $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.

b) Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, există numerele naturale nenule a_1, a_2, \dots, a_n care verifică relațiile $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ și $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$.

Soluție. a) Avem $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^4 + a^2b^2 + b^2c^2 = a^2(a^2 + b^2) + b^2c^2 = a^2c^2 + b^2c^2 = (a^2 + b^2)c^2 = c^4$ **1p**

Apoi $a_1 = a^2 < ab = a_2$ (deoarece $a < b$), $a_2 = ab < bc = a_3$ (deoarece $a < c$) și $a_3 = bc < c^2 = a_4$ (deoarece $b < c$), așadar $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ **1p**

b) Pentru $n = 3$, un exemplu este $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 5$ ($3 < 4 < 5$ și $3^2 + 4^2 = 5^2$).

Pentru $n \geq 4$ putem alege $a_1 = 7, a_2 = 8, a_3 = 10, \dots, a_{n-2} = 2n$. Evident, suma $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-2}^2$ este impară. Fie $N \in \mathbb{N}$ astfel ca $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-2}^2 = 2N + 1$. Atunci $N \geq 3$. Definim atunci $a_{n-1} = N$ și $a_n = N + 1$.

Avem $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 = 2N + 1 + N^2 = (N + 1)^2 = a_n^2$ și $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-2} < a_{n-1} < a_n$. Toate inegalitățile sunt evidente în afară de penultima: $a_{n-2} \leq \sqrt{2N + 1} < N = a_{n-1}$ revine la $N^2 > 2N + 1$, adică la $(N - 1)^2 > 2$, evident adevărat pentru $N \geq 3$ **5p**