



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012

CLASA a X-a

Problema 1. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea

$$|f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|,$$

pentru orice $x, y \in [0, \infty)$. Demonstrați că f este mărginită și periodică, iar funcția $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = x + f(x)$ este monotonă.

Problema 2. a) Determinați toate soluțiile reale ale ecuației $2^x = x+1$;
b) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(f(x)) = 2^x - 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $f(0) + f(1) = 1$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie șirul de numere naturale $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_n \leq n$, pentru orice $n \geq 1$ și

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{\pi a_k}{n} = 0,$$

pentru orice $n \geq 2$.

a) Aflați a_2 .

b) Determinați termenul general al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ în funcție de $n \in \mathbb{N}^*$

Problema 4. Fie a și b două numere raționale astfel încât numărul complex $z = a + ib$ să aibă modulul 1.

Arătați că modulul numărului complex $z_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$ este un număr rațional pentru orice n impar.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 martie 2018

CLASA a 10-a
Soluții și barem de notare

Problema 1. Să se afle x pentru care

$$\log_2(x^2 + 4) - \log_2 x + x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Soluție. Avem $x > 0$ și ecuația se scrie echivalent

$$\log_2 \left(x + \frac{4}{x} \right) = 2 - (x - 2)^2.$$

.....3p
 Cum $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$, obținem $\log_2 \left(x + \frac{4}{x} \right) \geq 2$2p
 Pe de altă parte, $2 - (x - 2)^2 \leq 2$1p
 deci ecuația are soluția unică $x = 2$1p

Problema 2. Să se arate că numărul

$$\sqrt[n]{\sqrt{2018} + \sqrt{2017}} + \sqrt[n]{\sqrt{2018} - \sqrt{2017}}$$

este irațional, pentru orice $n \geq 2$. *Gazeta Matematică*

Soluție. Să presupunem că, pentru un anumit n , numărul este rațional.
 Notăm $a = \sqrt[n]{\sqrt{2018} + \sqrt{2017}}$, $b = \sqrt[n]{\sqrt{2018} - \sqrt{2017}}$. Atunci $a + b \in \mathbb{Q}$ și
 $ab = 1$1p

Dacă $s_k = a^k + b^k$, atunci $(s_k)_{k \geq 0}$ verifică relația de recurență

$$s_{k+2} - (a + b)s_{k+1} + s_k = 0,$$

pentru orice $k \geq 0$3p

Cum $s_0 = 2$ și $s_1 = a + b \in \mathbb{Q}$, deducem că $s_k \in \mathbb{Q}$, pentru orice k 2p

În particular, $s_n = 2\sqrt{2018} \in \mathbb{Q}$, contradicție1p

Problema 3. Fie a, b, c numere reale, astfel încât $1 < b \leq c^2 \leq a^{10}$, și

$$\log_a b + 2 \log_b c + 5 \log_c a = 12.$$

Să se arate că

$$2 \log_a c + 5 \log_c b + 10 \log_b a \geq 21.$$

Soluție Fie $x = \log_a b$, $y = 2 \log_b c$, $z = 5 \log_c a$. Din ipoteză rezultă că
 $x, y, z > 0$ și $x + y + z = 12$ 1p

De asemenea, obținem $xyz = 10 \log_a b \log_b c \log_c a = 10$ 1p

Din $b \leq c^2$ deducem $2 \log_b c \geq 1$, iar din $c^2 \leq a^{10}$ rezultă $5 \log_c a \geq 1$,
 așadar $y, z \geq 1$, de unde $x \leq 10$ 2p

Să observăm că

$$2 \log_a c + 5 \log_c b + 10 \log_b a = xy + xz + yz = x(y + z) + yz = x(12 - x) + \frac{10}{x}$$

.....2p

Inegalitatea $x(12 - x) + \frac{10}{x} \geq 21$ este echivalentă cu $(x - 1)^2(x - 10) \leq 0$,
evident adevărată 1p

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se determine numerele complexe z care verifică relațiile

a) $z^n + z^{n-1} + \dots + z^2 + |z| = n$;

b) $|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \dots + |z|^2 + z = nz^n$.

Soluție. Observația că din enunț rezultă $n > 2$ nu se notează.

Din condiția a) deducem

$$n = |z^n + z^{n-1} + \dots + z^2 + |z|| \leq |z|^n + |z|^{n-1} + \dots + |z|^2 + |z|,$$

de unde $|z| \geq 1$ 2 puncte

Din b) deducem

$$n|z|^n \leq |z| + |z|^2 + \dots + |z|^{n-1} < 1 + |z| + \dots + |z|^{n-1},$$

..... 2 puncte

și apoi $|z| = 1$ 2 puncte

Introducând în b) ajungem la o contradicție 1 punct