Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a XI-a

Problema 1. Pentru un număr real $a > 1$ dat, considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a$ şi

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_{n+1},$$

pentru orice $n \geq 1$. Arătaţi că şirul este convergent şi determinaţi limita sa.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie matricele pătrate A, B de ordin 3 cu elemente numere reale astfel încât $AB = O_3$.

a) Demonstraţi că funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată de $f(x) = \det(A^2 + B^2 + xBA)$ este polinomială de grad cel mult 2.

b) Demonstraţi că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi matricile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $A \cdot B^2 = A - B$.

a) Arătaţi că matricea $I_n + B$ este inversabilă;

b) Arătaţi că $AB = BA$.

Problema 4. O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea $\mathcal{F}$ dacă pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există un interval (b, a) astfel încât pentru orice $x \in (b, a)$ să avem $f(x) \leq f(a)$.

a) Daţi un exemplu de funcţie cu proprietatea $\mathcal{F}$ nemonotonă pe $\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că dacă f este continuă şi are proprietatea $\mathcal{F}$, atunci f este crescătoare.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

CLASA a XI-a, varianta 2

Problema 1. Arătaţi că, dacă $n \geq 2$ este un număr întreg, atunci există matricele inversabile $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu elementele nenule, aşa încât $A_1^{-1}+A_2^{-1}+\ldots+A_n^{-1} = (A_1+A_2+\ldots+A_n)^{-1}$.

Gazeta Matematică

Soluţie. Egalitatea este echivalentă cu $(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)(A_1^{-1} + A_2^{-1} + \ldots + A_n^{-1}) = I_2$ ... **2p**

Vom lua $A_1 = A$, $A_2 = \ldots = A_n = B$. Cerinţa devine $I_2+(n-1)AB^{-1}+(n-1)BA^{-1}+(n-1)^2I_2 = I_2$. Notând $AB^{-1} = X$, căutăm X astfel încât $X+X^{-1}+(n-1)I_2 = 0_2$, sau $X^2+(n-1)X+I_2 = 0_2$. Astfel, putem lua $X = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ -1 & -n \end{pmatrix}$ ... **3p**

Pentru acest X putem lua $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2n-1 & -3n-2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ... **2p**

Problema 2. Considerăm mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid ab = cd \right\}$.

a) Daţi exemplu de matrice $A \in M$ astfel încât $A^{2017} \in M$ şi $A^{2019} \in M$, dar $A^{2018} \notin M$.

b) Arătaţi că, dacă $A \in M$ şi există numărul întreg $k \geq 1$ astfel încât $A^k \in M$, $A^{k+1} \in M$ şi $A^{k+2} \in M$, atunci $A^n \in M$, oricare ar fi numărul întreg $n \geq 1$.

Soluţie. a) Luăm $A \in M$ astfel încât $A^2 \notin M$ şi $A^2 + A + I_2 = 0_2$, deci $A^3 = I_2 = A^{2019} \in M$, $A^{2017} = A \in M$ şi $A^{2018} = A^2 \notin M$. Un exemplu este $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{3/2} & -2 \end{pmatrix}$ ... **2p**

b) Din teorema Hamilton-Cayley reiese recursiv că există $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ astfel încât $A^{k+2} = \alpha A + \beta I_2$. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, obţinem $(\alpha a + \beta)\alpha b = \alpha c(\alpha d + \beta)$, de unde $\alpha\beta(b - c) = 0$ ... **1p**

I) Dacă $b = c$, atunci $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$; în ambele cazuri $A^n \in M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ... **1p**

II) Dacă $b \neq c$, atunci $\alpha = 0$ sau $\beta = 0$, $A^{k+2} = \beta I_2$ sau $A^{k+2} = \alpha A$ şi analizăm în funcţie de $\delta = \det(A)$.

II.1) Dacă $\delta = 0$, atunci $A \in M$ şi $A^n = (\mathrm{tr}(A))^{n-1}A \in M$ pentru $n \geq 2$ ... **1p**

II.2) Dacă $\delta \neq 0$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\beta}A^{k+1}$, $\beta \neq 0$ sau $A^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^k$, $\alpha \neq 0$, deci $A^{-1} \in M$. Cum $A^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, obţinem $bd = ac$, iar $ab = cd$ duce la $b(a+d) = c(a+d)$, deci $a+d = 0$. Aceasta duce mai departe la $a = d = 0$, caz în care $A^n = \begin{pmatrix} 0 & b^n \\ c^n & 0 \end{pmatrix}$ pentru n impar şi $A^n = \begin{pmatrix} b^n & 0 \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$ pentru n par, sau la $a = -d \neq 0$, de unde $b = -c$ şi $A^{2n} = (a^2 - b^2)^n I_2$, $A^{2n+1} = (a^2 - b^2)^n A$; în toate cazurile reiese $A^n \in M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ... **2p**

Problema 3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietăţile $a_n > 1$ şi $a_{n+1}^2 \geq a_n a_{n+2}$, oricare ar fi $n \geq 1$. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_n = \log_{a_n} a_{n+1}$ pentru $n \geq 1$ este convergent şi calculaţi-i limita.

Soluţie. Din ipoteză reiese $2 \geq \log_{a_{n+1}} a_n + \log_{a_{n+1}} a_{n+2} = \frac{1}{x_n} + x_{n+1}$ (*) ... **1p**

Deducem $x_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{x_n} \leq x_n$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător ... **2p**

Cum şirul are termenii pozitivi, rezultă că el este convergent către o limită x ... **2p**

Trecând la limită în (*) obţinem $(x-1)^2 \leq 0$, deci $x = 1$ ... **2p**

Problema 4. Fie $a < b$ numere reale şi $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie astfel încât funcţiile $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x - a)f(x)$ şi $h : (a, b) \to \mathbb{R}$, $h(x) = (x - b)f(x)$ să fie crescătoare. Arătaţi că funcţia f este continuă pe (a, b).

Soluţie. Fie $a < c < b$. Pentru $x \in (c, b)$ avem $g(x) \geq g(c)$ şi, cum $x - a > 0$, $f(x) \geq \frac{c-a}{x-a}f(c)$. Apoi, din $h(x) \geq h(c)$ şi $x - b < 0$ rezultă $f(x) \leq \frac{c-b}{x-b}f(c)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to c} \frac{c-a}{x-a} = \lim\limits_{x\to c} \frac{c-b}{x-b} = 1$, folosind criteriul cleştelui, deducem $\lim\limits_{x\searrow c} f(x) = f(c)$ ... **5p**

Analog obţinem $\lim\limits_{x\nearrow c} f(x) = f(c)$, deci funcţia este continuă în orice punct $c \in (a, b)$ ... **2p**