

OLIMPIADA DE MATEMATICA A SATELOR DIN ROMANIA
FAZA LOCALA 24-02-2018
IZBICENI –OLT
CLASA A VIII-A

1. Determinați numerele întregi x și y care verifică relația: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$ (7p)

2. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât să aibă loc egalitatea :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 40 \quad (7p)$$

3. Se da expresia $E(x) = \left(\frac{3}{4x+5} + \frac{5}{5-4x} + \frac{2x+3}{16x^2-25} \right) \cdot \left(\frac{16x^2+40x+25}{-6x-37} \right)^{-1} + 2$

a) Determinați valorile lui x pentru care expresia este definită; (1p)

b) Aduceți expresia la o formă mai simplă; (4p)

c) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $E(x)$ este număr natural. (2p)

4. Se consideră piramida triunghiulară $VABC$ cu înălțimea $VO=6\text{cm}$ și apotema $VM=4\sqrt{3}\text{ cm}$ $M \in BC$.

Calculați :

a) Aria bazei piramidei; (2p)

b) Distanța de la O la planul (VBC) ; (2p)

c) Măsura unghiului format de planele (VAB) și (VBC) . (3p)

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru : 2 ore

Barem orientativ de evaluare și de notare

Subiectul I

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 4 - 1 - 8 = 0 \quad (2p)$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 5 - 8 = 0 \quad (1p)$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13 \quad (1p)$$

,deci 13 trebuie scris ca suma de doua patrate perfecte $13 = 2^2 + 3^2$ (1p)

$$(x - 2)^2 = 2^2, x = 4; (y + 1)^2 = 3^2, y = 2 \quad (1p)$$

$$\text{sau } (x - 2)^2 = 3^2, x = 5; (y + 1)^2 = 2^2, \quad (1p)$$

Subiectul II

Rationalizarea cu conjugatul (1p)

$$\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 40 \quad (2p)$$

$$-1 + \sqrt{n+1} = 40 \quad (1p)$$

$$\sqrt{n+1} = 41, \quad (1p)$$

$$n+1 = 41^2, \quad (1p)$$

$$n = 1680 \quad (1p)$$

Subiectul III

$$a) x \in R / \left\{ \pm \frac{5}{4}, -\frac{37}{6} \right\} \quad (1p)$$

$$b) E(x) = \left[\frac{3}{4x+5} - \frac{5}{4x-5} + \frac{2x+3}{(4x+3)(4x-3)} \right] \cdot \frac{-6x-37}{(4x+5)^2} + 2 \quad (1p)$$

$$\text{Se rezolva paranteza rotunda si se obtine : } E(x) = \frac{-6x-37}{(4x-5)(4x+5)} \cdot \frac{(4x+5)^2}{-6x-37} + 2 \quad (2p)$$

$$E(x) = \frac{12x-5}{4x-5} \quad (1p)$$

$$c) E(x) \in N \Leftrightarrow \frac{12-x}{4x-5} \in N, \text{deci } (12x - 5) : (4x - 5) \quad (1p)$$

$$E(x) = 3 + \frac{10}{4x-5} \rightarrow x = 0 \quad (1p)$$

Subiectul IV

a) $OM=2\sqrt{3}$, $AB=12\text{cm}$. (1p)

$$A=36\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad (1p)$$

b) OP distanta de la O planul VBC –justificare (1p)

$$OP=\frac{VO \cdot OM}{VM}, OP=\frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \quad OP=3\text{cm} \quad (1p)$$

c) Unghiul dintre planele (VAB) si (VBC) este unghiul ATC, $TE \perp VB$ –justificare (1p)

Aflam lungimile laturilor triunghiului ATC si inaltimile acestuia. (1p)

Sinusul unghiului format de cele doua plane are valoarea $\sin ATC = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ (1p)