

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ**  
**25 FEBRUARIE 2018**  
**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE**

**Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**

**Clasa a V-a**

**Subiectul 1**

- a) Să se scrie numărul  $a = 15^{2018}$  ca sumă de cinci cuburi perfecte.  
b) Alegem 121 numere naturale nenule, distincte, a căror sumă este 7775. Să se arate că printre aceste numere se află cel puțin unul care să fie cub perfect.

**Prof. Delia Ileana Naidin Basch, Iuliana Trașcă**

**Barem:**

- a)  $15^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$  .....2p  
 $15^{2018} = 15^2 \cdot 15^{2016} = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3) \cdot (15^{672})^3$  .....1p  
 $15^{2018} = (1 \cdot 15^{672})^3 + (2 \cdot 15^{672})^3 + (3 \cdot 15^{672})^3 + (4 \cdot 15^{672})^3 + (5 \cdot 15^{672})^3$  .....1p  
b) Suma celor mai mici 121 numere naturale nenule, distincte, exceptând cuburile perfecte, este:  
 $1 + 2 + 3 + \dots + 126 - (1 + 8 + 27 + 64 + 125) = 8001 - 225 = 7776$  .....2p  
Obținem o contradicție  $\Rightarrow$  în sumă se află cel puțin un cub perfect. ....1p

**Subiectul 2**

- a) Să se arate că:  $\frac{5^{24}}{2} < 2^{55} < 5^{25}$ .  
b) Câte cifre are numărul  $A = 2^{2018} \cdot 5^{1938}$  ?

**Prof. Iuliana Trașcă**

**Barem:**

$$\frac{5^{24}}{2} < 2^{55} \Leftrightarrow 5^{24} < 2^{56}$$
$$\left. \begin{array}{l} 5^{24} = (5^3)^8 = 125^8 \\ 2^{56} = (2^7)^8 = 128^8 \end{array} \right\} \Rightarrow 5^{24} < 2^{56} \text{ .....1p}$$

$$\left. \begin{aligned} 5^{25} &= (5^5)^5 = 3125^5 \\ 2^{55} &= (2^{11})^5 = 2048^5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2^{55} < 5^{25} \Rightarrow \frac{5^{24}}{2} < 2^{55} < 5^{25} \dots\dots\dots 1p$$

b)

Inmulțind inegalitatea de la punctul a) cu  $2^{25}$ , putem scrie:  $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$  (1).....1p

$$A = 2^{2018} \cdot 5^{1938} = 2^{80} \cdot 2^{1938} \cdot 5^{1938} = 2^{80} \cdot 10^{1938} \dots\dots\dots 2p.$$

Inmulțind inegalitatea (1) cu  $10^{1938}$  avem:

$$10^{24} \cdot 10^{1938} < 2^{80} \cdot 10^{1938} < 10^{25} \cdot 10^{1938} \Rightarrow 10^{1962} < A < 10^{1963} \Rightarrow A \text{ are } 1963 \text{ cifre} \dots\dots\dots 2p$$

### Subiectul 3

Aflați numerele prime  $x$ ,  $y$  și  $z$  astfel încât să aibă loc egalitatea:  $21 \cdot x^z + y = 21 \cdot x + 2522$ .

**Prof. Cătălin Mîinescu**

**Barem:**

$$21 \cdot x \cdot (x^{z-1} - 1) = 2522 - y \dots\dots\dots 1p$$

Pentru  $x$  par sau impar, membrul stâng este întotdeauna par. .... 1p

$2522 - y$  este par, deci  $y$  este par. Cum  $y$  este număr prim, rezultă că  $y = 2$  .....1p

$$x \cdot (x^{z-1} - 1) = 120 \text{ și } 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \dots\dots\dots 2p$$

$x$  este număr prim, deci poate fi 2, 3 sau 5. Verifică pentru  $x = 5, z = 3$  .....2p

### Subiectul 4

Arătați că, oricum am alege nouă numere naturale, găsim trei dintre ele astfel încât suma sau diferența oricăror două să dea un multiplu al lui 7.

**(G.M. 3/2017)**

**Barem:**

La împărțirea cu 7 putem obține resturile: 0, 1, 2, 3, 4, 5 sau 6.....1p

Folosim principiul cutiei.

Formăm 4 cutii: numere care dau restul 0, numere care dau restul 1 sau 6, numere care dau restul 2 sau 5, numere care dau restul 3 sau 4.....1p

Având 9 numere, există cel puțin o cutie cu 3 numere. ....1p

Pentru oricare două dintre cele trei numere din aceeași cutie avem două posibilități:

- cele două numere dau același rest și atunci diferența lor se divide cu 7, .....2p

- sau cele două numere dau resturi diferite și atunci suma lor se divide cu 7.....2p

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
25 FEBRUARIE 2018  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE**

**Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**

**Clasa a VI-a**

**Subiectul 1**

Aflați numerele naturale  $a$  și  $b$  știind că  $(a, b) + [a, b] = 133$ .

**Prof. Gabriela Ionică**

**Barem:**

Dacă  $d = (a, b)$ , atunci  $a = dx$ ,  $b = dy$ , cu  $x, y \in \mathbb{N}$  și  $(x, y) = 1$ . .....1p

Obținem  $[a, b] = dxy$  și  $d + dxy = 133$ , adică  $d(1 + xy) = 7 \cdot 19$ . .....2p

Distingem cazurile:

**Caz I.**  $d = 1$  și  $1 + xy = 133$ , adică  $xy = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ .

Cum  $(x, y) = 1$  avem subcazurile:

$x = 1$ ,  $y = 132$ ,

$x = 3$ ,  $y = 44$

$x = 4$ ,  $y = 33$

$x = 11$ ,

$y = 12$ . .....1p

**Caz II.**  $d = 7$  și  $1 + xy = 19$ , adică  $xy = 2 \cdot 3^2$ . Cum  $(x, y) = 1$  avem subcazurile:

$x = 1$ ,  $y = 8$ , adică  $a = 7$ ,  $b = 126$

$x = 2$ ,  $y = 9$ , adică  $a = 14$ ,

$b = 63$ . .....1p

**Caz III.**  $d = 19$  și  $1 + xy = 7$ , adică  $xy = 6$ . Cum  $(x, y) = 1$  avem subcazurile:

$x = 1$ ,  $y = 6$ , adică  $a = 19$ ,  $b = 104$

$x = 2$ ,  $y = 3$ , adică  $a = 38$ ,

$b = 57$ . .....1p

**Caz IV.**  $d = 133$ , conduce la  $xy = 0$ : imposibil. ....1p

**Subiectul 2**

Dacă  $S$  este suma tuturor numerelor naturale care împărțite la  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , dau câtul egal cu restul, arătați că  $4S \vdots 6$ .

**Prof. Ion Burcă-Florea**

**Barem:**

Numerele sunt de forma  $n \cdot x + x$ .  $x < n$  .....2p

Atunci suma numerelor este

$$S = (n \cdot 1 + 1) + (n \cdot 2 + 2) + \dots + [n(n - 1) + n - 1] =$$

$$= n[1 + 2 + \dots + (n - 1)] + [1 + 2 + \dots + (n - 1)] =$$

$$(n+1)[1+2+\dots+(n-1)] = \frac{(n-1)n(n+1)}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Atunci } 45 = 2n(n-1)(n+1) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cum } (n-1)n(n+1) : 3 \Rightarrow 45 : 2 \text{ și } 45 : 3, (2; 3) = 1 \Rightarrow 45 : 6 \dots\dots\dots 2p$$

### Subiectul 3

Fie  $\angle AOB$  ascuțit, iar punctele  $C$  și  $D$  de o parte și alta a dreptei  $[OB$ , astfel încât

$m(\angle AOC) = \frac{1}{2}m(\angle AOB)$  și  $m(\angle BOD) = 3m(\angle AOC)$ . Dacă  $C, O, D$  sunt coliniare aflați:

a)  $m(\angle AOB)$ .

b) Măsura unghiului format de bisectoarea  $\angle AOC$  și semidreapta opusă semidreptei  $[OB$ .

**Prof. Gabriela Ionică**

### Barem:

a) Distingem cazurile:

**Caz I.**  $[OA \subset \text{Int}(\angle BOC)$

Notăm  $m(\angle AOB) = u$ . Din  $C, O$  și  $D$  coliniare obținem  $m(\angle COD) = m(\angle COA) + m(\angle AOB) +$

$$m(\angle BOD) = \frac{u}{2} + u + \frac{3}{2}u = 180^\circ, \text{ ceea ce conduce la } 3u = 180^\circ, \text{ adică } u = 60^\circ \dots\dots\dots 2p$$

**Caz II.**  $[OC \subset \text{Int}(\angle BOA)$

Notăm  $m(\angle AOB) = u$ . Din  $C, O$  și  $D$  coliniare obținem

$$m(\angle COD) = m(\angle COB) + m(\angle BOD) = \frac{u}{2} + \frac{3}{2}u = 180^\circ, \text{ ceea ce conduce la } 2u = 180^\circ,$$

$$\text{adică } u = 90^\circ (\text{Fals}) \dots\dots\dots 2p$$

b) fie  $[OQ$  semidreapta opusă lui  $[OB$  și  $[OP$  bisectoarea unghiului  $AOC$

Avem că unghiul  $\angle COQ$  și unghiul  $\angle BOD$  opuse la vârf, deci  $m(\angle COQ) = m(\angle BOD) = 90^\circ$ , iar

$$m(\angle COP) = \frac{1}{2}m(\angle COA) = 30/2 = 15^\circ \dots\dots\dots 3p$$

### Subiectul 4

Spunem despre o mulțime de numere naturale că are proprietatea  $P$  dacă orice element al ei are exact 4 divizori.

a) Scrieți mulțimea cu proprietatea  $P$  formată din cele mai mici patru numere naturale de trei cifre.

b) Fie  $A$  o mulțime cu proprietatea  $P$  astfel încât  $8 \in A$ . Arătați că, orice elemente ar avea mulțimea  $A$  suma divizorilor acestor elemente nu poate fi 2014.

**(G.M. 11/2014)**

### Barem:

$$\text{a) } M = \{106, 111, 115, 118\} \dots\dots\dots 2p$$

b) Fie  $x \in A$  și  $x = d_1^{\alpha_1} \cdot d_2^{\alpha_2} \cdot d_3^{\alpha_3} \cdot \dots$  descompunerea în factori primi.

Deoarece  $x$  are 4 divizori avem relația  $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots = 4$ . .....1p

Cazul I.  $\alpha_1 + 1 = 4 \Rightarrow \alpha_1 = 3$ ;  $\alpha_2 + 1 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 0$ ;  $\alpha_3 + 1 = 1 \Rightarrow \alpha_3 = 0$ ; ...

Deci  $x = d_1^3 = d^3$  .....1p

Cazul II.  $\alpha_1 + 1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 1$ ;  $\alpha_2 + 1 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 1$ ;  $\alpha_3 + 1 = 1 \Rightarrow \alpha_3 = 0$ ; ...

Deci  $x = d_1 \cdot d_2$ . .....1p

Notăm  $s(x)$  suma divizorilor n numărului  $x \Rightarrow s(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

Dacă  $x \in A$ ,  $x \neq 8 \Rightarrow x = d^3$ ,  $d$  număr prim diferit de 2 sau  $x = d_1 \cdot d_2$  unde  $d_1, d_2$  sunt numere prime.

Pentru  $x = d^3 \Rightarrow s(x) = 1 + d + d^2 + d^3 = (1 + d)(1 + d^2) \Rightarrow s(x)$  număr par. ....1p

Pentru  $x = d_1 \cdot d_2 \Rightarrow s(x) = 1 + d_1 + d_2 + d_1 \cdot d_2 = (1 + d_1)(1 + d_2) \Rightarrow s(x)$  număr par.

Suma divizorilor elementelor mulțimii  $A$  este număr impar, deci este diferită de 2014.....1p

Observație: Dacă elevul precizează că  $x = d^3$  sau  $x = d_1 \cdot d_2$ . unde  $d, d_1, d_2$  sunt numere prime și nu demonstrează, se acordă 1p.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
25 FEBRUARIE 2018  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE**

**Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**

**Clasa a VII-a**

**Subiectul 1**

a) Arătați că oricare ar fi numărul natural  $c$ , există  $a$  și  $b$  numere naturale nenule astfel încât media geometrică a numerelor:  $49^{a^2}$  și  $49^{b^3}$  este  $7^{3^{6c+2}}$

b) Determinați  $x, y \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 1$

**Prof. Steluța Dan**

**Barem:**

a) Avem:  $\sqrt{49^{a^2} \cdot 49^{b^3}} = 7^{3^{6c+2}}$

Deci:  $7^{a^2} \cdot 7^{b^3} = 7^{3^{6c+2}} \Rightarrow 7^{a^2+b^3} = 7^{3^{6c+2}} \Rightarrow a^2 + b^3 = 3^{6c+2} \dots\dots\dots 1p$

$a^2 + b^3 = 3^{2+6c} = 3^2 \cdot 3^{6c} = (1+8) \cdot 3^{6c} \dots\dots\dots 1p$

Deci:  $a^2 + b^3 = 3^{6c} + 8 \cdot 3^{6c} = 3^{3c \cdot 2} + 2^3 \cdot 3^{2c \cdot 3} = (3^{3c})^2 + (2 \cdot 3^{2c})^3$

Obținem:

$a = 3^{3c}$  și  $b = 2 \cdot 3^{2c}$ ,  $a, b \geq 1, a, b \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$

b)  $x \neq 0$  și  $y \neq 0$

$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 1 \Rightarrow \frac{2y-3x}{xy} = 1 \Rightarrow 2y = 3x + xy \Rightarrow x = \frac{2y}{y+3} \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1p$

Din  $y+3 \mid 2y$  și  $y+3 \mid 2y+6 \Rightarrow y+3 \mid 2y+6-2y$

$2y \Rightarrow y+3 \mid 6 \Rightarrow y+3 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \dots\dots\dots 2p$

1)  $y+3 = -1 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = \frac{2y}{y+3} = \frac{2 \cdot (-4)}{-4+3} = \frac{-8}{-1} = 8$  Deci:  $x = 8; y = -4$

2)  $y+3 = 1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = \frac{2y}{y+3} = \frac{2 \cdot (-2)}{-2+3} = \frac{-4}{1} = -4$  Deci:  $x = -4; y = -2$

3)  $y+3 = -2 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow x = \frac{2y}{y+3} = \frac{2 \cdot (-5)}{-5+3} = \frac{-10}{-2} = 5$  Deci:  $x = 5; y = -5$

4)  $y+3 = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = \frac{2y}{y+3} = \frac{2 \cdot (-1)}{-1+3} = \frac{-2}{2} = -1$  Deci:  $x = -1; y = -1$

5)  $y+3 = -3 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow x = \frac{2y}{y+3} = \frac{2 \cdot (-6)}{-6+3} = \frac{-12}{-3} = 4$  Deci:  $x = 4; y = -6$

- 6)  $y + 3 = 3 \Rightarrow y = 0$ , imposibil pentru că  $y \neq 0$   
 7)  $y + 3 = -6 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow x = \frac{2y}{y+3} = \frac{2 \cdot (-9)}{-9+3} = \frac{-18}{-6} = 3$  Deci:  $x = 3; y = -9$   
 8)  $y + 3 = 6 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = \frac{2y}{y+3} = \frac{2 \cdot (3)}{3+3} = \frac{6}{6} = 1$  Deci:  $x = 1; y = 3$

Finalizare

$(x,y) \in \{(8,-4) (-4,-2) (5,-5) (-1,-1) (4,-6) (3,-9) (1,3)\}$ .....1p

## Subiectul 2

Fie  $S$  suma tuturor numerelor naturale  $\overline{abc}$  pentru care  $\frac{\overline{ab}}{a}$ ,  $\frac{\overline{bc}}{b}$  și  $\frac{\overline{ca}}{c}$  sunt numere naturale, iar  $q$  și  $r$ , câtul respectiv restul împărțirii lui  $S$  la 2018. Arătați că  $q$  și  $\sqrt{r+2}$  sunt numere prime.

**Prof. Ion Burcă-Florea**

**Barem:**

Din  $\frac{\overline{ab}}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a | \overline{ab}$  adică  $a | 10a + b$

Cum  $a | 10a \Rightarrow a | b(1)$ .....1p

Analog, din  $\frac{\overline{bc}}{b} \in \mathbb{N} \Rightarrow b | c$  (2).....1p

Si din  $\frac{\overline{ca}}{c} \in \mathbb{N} \Rightarrow c | a$  (3).....1p

Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă  $a \leq b \leq c \leq a$ , deci

$a = b = c$ .....1p

Numerele de forma  $\overline{abc}$  cu  $a = b = c$  sunt: 111; 222; 333; 444; 555; 666; 777; 888; 999

$S = 111 + 222 + 333 + \dots + 999 = 4995$  .....1p

Cum  $4995 : 2018 = 2$  rest 959, rezultă  $q=2$  (număr prim) și  $\sqrt{r+2} = \sqrt{961} = 31$  (număr prim)....2p

## Subiectul 3

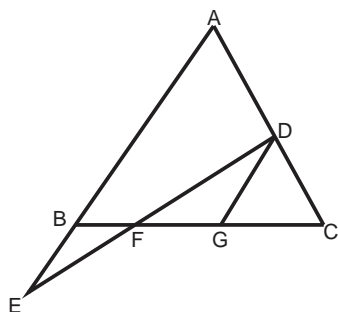
Fie  $\triangle ABC$  un triunghi isoscel cu  $[AB] \equiv [AC]$  și  $D \in (AC)$ . Se construiește  $BE$  astfel încât

$B \in (AE)$  și  $[BE] \equiv [CD]$ . Se notează cu  $F$  punctul de intersecție al dreptelor  $DE$  și  $BC$ .

Să se demonstreze că  $[EF] \equiv [FD]$ .

**Prof. Remus Giurescu**

**Barem:**





Fie  $DG \parallel AB, G \in (BC)$ .....1p

Avem  $\angle ABC \equiv \angle DGC$  ( $BC$  e secantă).....1p

$\angle ABC \equiv \angle ACB \Rightarrow \angle DGC \equiv \angle DCG \Rightarrow \triangle DGC$  isoscel și  $DG = DC$ .....1p

Dar  $DC = BE \Rightarrow \left. \begin{matrix} DG = BE \\ DG \parallel BE \end{matrix} \right\} \Rightarrow DGE B$  paralelogram .....3p

Din:  $\left. \begin{matrix} BG \cap DE = \{F\} \\ DGE B \text{ paralelogram} \end{matrix} \right\} \Rightarrow EF = FD$  .....1p

#### Subiectul 4

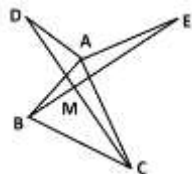
Fie  $ABC$  un triunghi oarecare. În exterior se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele  $ABD$  ( $AB = AD$ ) și  $ACE$  ( $AC = AE$ ). Arătați că  $CD \perp BE$ .

(G. M. 4/2017)

#### Barem:

Avem  $\triangle ADC \equiv \triangle ABE$  deoarece

$[AD] \equiv [AB]$  (ip.) și  $[AC] \equiv [AE]$  (ip.) și  $\angle DAC \equiv \angle BAE (= m(\angle BAC) + 90^\circ)$ .....2p



De aici  $m(\angle ADC) = m(\angle ABE) = a$  și  $m(\angle ACD) = m(\angle AEB) = b$ .

Din  $\triangle DAC$  avem  $a + b = 90^\circ - m(\angle BAC)$  (1).....1p

Notând  $\{M\} = DC \cap BE$  avem  $m(\angle MBC) = m(\angle ABC) - a$  și  $m(\angle MCB) = m(\angle ACB) - b$ .....1p

În  $\triangle MBC$  avem  $m(\angle MBC) + m(\angle MCB) = m(\angle ABC) - a + m(\angle ACB) - b$ .....1p

$m(\angle MBC) + m(\angle MCB) \stackrel{(1)}{=} m(\angle ABC) + m(\angle ACB) + m(\angle BAC) - 90^\circ$

$m(\angle MBC) + m(\angle MCB) = 90^\circ$ .....1p

De aici  $m(\angle BMC) = 90^\circ \Rightarrow CD \perp BE$ .....1p



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
25 FEBRUARIE 2018  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE**

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

**Clasa a VIII-a**

**Subiectul 1**

Dacă  $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) = 2018$  cu  $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$ , arătați că:

$$\sqrt{(2018 + 2abc)(a+b)(b+c)(c+a)} \in \mathbb{Q}.$$

**Prof. Dan Coma**

**Barem:**

$$2018 + 2abc = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc = (a+b)(b+c)(c+a) \dots\dots\dots 5p$$

În acest caz avem:

$$\sqrt{(2018 + 2abc)(a+b)(b+c)(c+a)} = \sqrt{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} =$$

$$= (a+b)(b+c)(c+a) \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 2p$$

**Subiectul 2**

Fie expresia:

$$E(a, b) = \left[ \frac{a+2b+1}{(a+b)(2a+3b+1)} + \frac{a+2b+2}{(2a+3b+1)(3a+5b+3)} + \frac{a+2b+3}{(3a+5b+3)(4a+7b+6)} \right] \cdot \frac{2(2a+3)+7b}{a+2b+2}$$

unde  $a, b, c \in (0; +\infty)$ .

a) Demonstrați că:  $(a+b) \cdot E(a, b) \in \mathbb{N}$ .

b) Dacă  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ , demonstrați că:  $E(a, b) + E(b, c) + E(c, a) \leq 3$ .

**Prof. Nicolae Tomescu**

**Barem:**

$$\begin{aligned} \text{a) } E(a, b) &= \left[ \frac{(2a+3b+1)-(a+b)}{(a+b)(2a+3b+1)} + \frac{(3a+5b+3)-(2a+3b+1)}{(2a+3b+1)(3a+5b+3)} + \frac{(4a+7b+6)-(3a+5b+3)}{(3a+5b+3)(4a+7b+6)} \right] \cdot \frac{4a+7b+6}{a+2b+2} \dots\dots\dots 1p \\ &= \left( \frac{1}{a+b} - \frac{1}{2a+3b+1} + \frac{1}{2a+3b+1} - \frac{1}{3a+5b+3} + \frac{1}{3a+5b+3} - \frac{1}{4a+7b+6} \right) \cdot \frac{4a+7b+6}{a+2b+2} = \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{1}{a+b} - \frac{1}{4a+7b+6} \right) \cdot \frac{4a+7b+6}{a+2b+2} = \frac{3}{a+b} \dots\dots\dots 1p$$

$$(a+b)E(a,b) = (a+b) \cdot \frac{3}{a+b} = 3 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$$

$$b) E(a,b) + E(b,c) + E(c,a) =$$

$$\frac{3}{a+b} + \frac{3}{b+c} + \frac{3}{c+a} = \frac{3}{2} \left( \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \right) \leq \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \right] =$$

$$\frac{3}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 \dots\dots\dots 3p$$

### Subiectul 3

Se dă rombul  $ABCD$ ,  $M$  mijlocul laturii  $[BC]$  și  $m(\angle BAD) = 30^\circ$ .

- Dacă  $A_{ABM} = 12,5 \text{ cm}^2$ , determinați perimetrul rombului.
- În  $M$  se ridică perpendiculara  $MN = 10 \text{ cm}$  pe planul rombului.  
Determinați o relație trigonometrică a unghiului diedru dintre planul  $(NBD)$  și planul  $(ABC)$ .
- Determinați distanța de la  $M$  la planul  $(NAC)$ .

Prof. Nicolae Bivol

### Barem:

$$a) A_{AMB} = 12,5 \text{ cm}^2 \text{ și } [AM] \text{ mediana în } \triangle ABC \Rightarrow A_{ABC} = 25 \text{ cm}^2$$

$$\text{Atunci } A_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABC} = 2 \cdot 25 = 50 \text{ cm}^2. \text{ Dar } A_{ABD} = \frac{A_{ABCD}}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Dar } A_{ABD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin A}{2}$$

$$\Rightarrow 25 = \frac{AB^2 \cdot \sin 30^\circ}{2} \Rightarrow AB = 10 \text{ cm} \Rightarrow P_{ABCD} = 40 \text{ cm} \dots\dots\dots 2p$$

$$b) \text{ Din } MN \perp (ABC) \text{ și } MT \perp BD, BD \subset (ABC) \Rightarrow NT \perp BD,$$

$$NT \subset (BDN) \Rightarrow m(\angle(NDB)(ABC)) = m(\angle NTM) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Calculul segmentelor } BD = 10\sqrt{2-\sqrt{3}}, AO = 5\sqrt{2+\sqrt{3}} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Calculul segmentului } MT = \frac{5\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, \text{ tg}(\angle(NTM)) = 4\sqrt{2-\sqrt{3}} \dots\dots\dots 1p$$

$$c) \text{ Din } MN \perp (ABC) \text{ și } MF \perp AC, AC \subset (ABC) \Rightarrow NF \perp AC \Rightarrow AC \perp (MNF) \text{ și } AC \subset (NAC) \Rightarrow$$

$$(MNF) \perp (NAC) \text{ și dacă } MQ \perp NF, MQ \subset (MNF) \Rightarrow MQ \perp (NAC) \Rightarrow MQ =$$

$$d(M; (NAC)) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Calculul } MQ = \frac{10\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{18-\sqrt{3}}} \dots\dots\dots 1p$$

**Subiectul 4**

Fie triunghiul dreptunghic  $ABC$  cu catetele  $AB=12$  cm și  $AC=5$  cm. Pe planul triunghiului  $ABC$  se ridică de aceeași parte a planului  $(ABC)$  perpendicularele  $AA'=6$  cm,  $BB'=11$  cm,  $CC'=x$  cm.

a) Să se determine  $x$  astfel încât  $\triangle A'B'C'$  să fie dreptunghic în  $A'$ .

b) Dacă  $M \in (AB)$ , să se afle  $AM$  astfel încât  $\triangle CMB'$  să fie isoscel.

**Supliment G. M. nr. 11/ 2017**

Barem:

a)  $\triangle ABC, m(\sphericalangle A) = 90^\circ \Rightarrow BC = 13$  cm.....1p

$A'B'=13$  cm,  $A'C'=\sqrt{(6-x)^2+25}$ ,  $C'B'=\sqrt{(11-x)^2+169}$ .....1p

$\triangle A'B'C'$  dreptunghic în

$A' \Rightarrow B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 \Rightarrow (11-x)^2 + 169 = (6-x)^2 + 25 + 169 \Rightarrow x = 6$  cm...1p

b)  $AM=y$ ,  $M \in (AB)$ ,  $y < 12$ .

$B'M=\sqrt{(12-y)^2+121}$ ,  $CM=\sqrt{y^2+25}$ ,  $CB'=\sqrt{290}$  cm.....1p

Cazul 1:  $CM=MB' \Rightarrow 25 + y^2 = 121 + 144 - 24y + y^2 \Rightarrow y = 10$  cm

și  $10 < 12 \Rightarrow AM = 10$  cm, *solutie*.....1p

Cazul 2:  $CM=CB' \Rightarrow 25 + y^2 + 290 \Rightarrow y = \sqrt{265} > \sqrt{144} = 12$ ,

nu este solutie.....1p

Cazul 3:

$CB'=B'M=$

$> 121 + (12-y)^2 = 290 \Rightarrow y^2 - 24y - 25 = 0 \Rightarrow (y-25)(y+1) = 0 \Rightarrow y_1 =$

$25$  sau  $y_2 = -1$

(nu sunt solutii).....1p.