

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
25 FEBRUARIE 2018  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE

**Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**

**Clasa a IX-a**

**Subiectul 1**

Fie  $x, y, z > 0$  astfel încât  $xy + yz + zx = 3$ . Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sqrt{1+x^4} + \sqrt{1+y^4} + \sqrt{1+z^4} \geq 3\sqrt{2} . \text{ Când se realizează cazul de egalitate?}$$

\*\*\*

**Barem:**

$$\sqrt{1+a^4} \geq \sqrt{2}a \quad (\forall)a \in R \quad (\text{inegalitatea mediilor}) \dots\dots\dots 1p$$

atunci  $\sqrt{1+x^4} + \sqrt{1+y^4} + \sqrt{1+z^4} \geq \sqrt{2}(x+y+z), (\forall)x, y, z > 0$  (1) (cu egalitatea numai pentru  $x = y = z = 1$ ).....2p

Mai mult, cum

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, (\forall)x, y, z \in R, \text{ cu egalitate numai pentru } x = y = z, \dots\dots\dots 1p$$

avem că:

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx), (\forall)x, y, z \in R, \text{ cu egalitate numai pentru } x = y = z \quad (2) \dots\dots\dots 2p$$

Din (1), (2) și ipoteză rezultă că inegalitatea cerută este demonstrată, egalitatea având loc numai pentru  $x = y = z = 1$ .....1p

**Subiectul 2**

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:  $\lfloor x-2017 \rfloor + \lfloor x-2018 \rfloor = 1$ .

Am notat cu  $\|$  și cu  $[.]$  modulul, respectiv partea întreagă a unui număr real.

**Prof. Pepino Dincă**

**Barem:**

Notăm  $x-2018 = y$ .

$$\text{Obținem că } \lfloor y+1 \rfloor + \lfloor y \rfloor = 1 \Leftrightarrow \lfloor y \rfloor + 1 + \lfloor y \rfloor = 1 \quad (*)$$

$$\text{Dar } \lfloor y \rfloor \geq 0 \Rightarrow \lfloor y \rfloor \in \{0,1\} \dots\dots\dots 2p$$

Cazul I)

$$\lfloor y \rfloor = 0 \Rightarrow |y| \in [0,1) \Rightarrow y \in (-1,1)$$

Pentru  $y \in (-1,0) \Rightarrow [y] = -1 \Rightarrow 0 + 0 = 1$ , deci NU este verificată relația (\*).

Pentru  $y \in [0,1) \Rightarrow [y] = 0$  și este verificată relația (\*),

$\Rightarrow [x - 2018] = 0 \Leftrightarrow x \in [2018, 2019)$  .....2p

Cazul II)

$[|y|] = 1 \Rightarrow |y| \in [1,2) \Rightarrow y \in (-2, -1) \cup [1,2)$  .....1p

Pentru  $y \in (-2, -1) \Rightarrow [y] = -2$  și relația (\*) de mai sus NU este verificată.

Pentru  $y = -1$ , relația (\*) de mai sus este verificată.

Deci  $x - 2018 = -1 \Rightarrow x = 2017$ . .....1p

Pentru  $y \in [1,2) \Rightarrow [y] = 1 \Rightarrow$  relația (\*) de mai sus NU este verificată.

Așadar,  $x \in \text{Solutie} = \{2017\} \cup [2018, 2019)$  .....1p

### Subiectul 3

Pe laturile triunghiului  $ABC$  se consideră punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in (BC)$  și  $P \in (CA)$  astfel încât

$\frac{AM}{AB} = k$ ,  $\frac{BN}{BC} = l$  și  $\frac{CP}{CA} = m$ . Să se arate că centrul de greutate al triunghiului  $MNP$  aparține

medianei din  $A$  a triunghiului  $ABC$  dacă și numai dacă  $2l = k + m$ .

\*\*\*

#### Barem:

Fie  $G$  și  $G_1$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $ABC$  și  $MNP$ .

Avem  $\overrightarrow{GG_1} = \frac{\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP}}{3}$ . Cum  $\overrightarrow{GM} = (1-k)\overrightarrow{GA} + k\overrightarrow{GB}$ ,  $\overrightarrow{GN} = (1-l)\overrightarrow{GB} + l\overrightarrow{GC}$  și

$\overrightarrow{GP} = (1-m)\overrightarrow{GC} + m\overrightarrow{GA}$  rezultă că  $\overrightarrow{GG_1} = \frac{(m-k)\overrightarrow{GA} + (k-l)\overrightarrow{GB} + (l-m)\overrightarrow{GC}}{3}$  .....4p

Folosind faptul că  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$  .....1p

deducem că  $\overrightarrow{GG_1} = \frac{(2k-l-m)\overrightarrow{GB} + (k+l-2m)\overrightarrow{GC}}{3}$  ..... 1p

Vectorii  $\overrightarrow{GG_1}$  și  $\overrightarrow{AG}$  sunt coliniari dacă și numai dacă  $2k-l-m = k+l-2m$ , deci dacă și numai dacă  $2l = k + m$  ..... 1p

### Subiectul 4

Șirurile  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$  sunt definite prin:  $a_1 = 2018$ ,  $b_1 = 2017$ , iar

$a_{n+1} = 2018a_n + 2017b_n - 1$ ,  $\forall n \geq 1$ ,  $b_{n+1} = 2017a_n + 2018b_n + 1$ ,  $\forall n \geq 1$ . Să se calculeze  $b_{2017} - a_{2017}$ .

(G.M.10/2017)



Barem: Prin scaderea relatiilor avem

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - a_n + 2, \forall n \geq 1 \dots\dots\dots 2p$$

Folosim relatia de recurenta si scriem:

$$b_2 - a_2 = b_1 - a_1 + 2$$

$$b_3 - a_3 = b_2 - a_2 + 2$$

.....

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - a_n + 2, \forall n \geq 1 \dots\dots\dots 2p$$

Prin adunarea relatiilor membru cu membru

si reducerea termenilor,avem relatia:

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_1 - a_1 + 2n - 1, \forall n \geq 1 \dots\dots\dots 1p.$$

$$\text{Finalizare: } b_{2017} - a_{2017} = 4031 \dots\dots\dots 2p$$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
25 FEBRUARIE 2018  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

**Clasa a X-a**

**Subiectul 1**

Să se arate că dacă  $x \in (0,1)$  și  $y \in (0,1)$  atunci  $\log_x \frac{2xy}{x+y} + \log_y \frac{2xy}{x+y} \geq 2$ .

**Prof. Valentin Radulescu**

**Barem:**

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \dots\dots\dots 1p$$

$$\log_x \frac{2xy}{x+y} \geq \frac{1}{2}(1 + \log_x y) \dots\dots\dots 1p$$

$$\log_y \frac{2xy}{x+y} \geq \frac{1}{2}(1 + \log_y x) \dots\dots\dots 1p$$

$$\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \geq 2 \dots\dots\dots 2p$$

$$\log_x \frac{2xy}{x+y} + \log_y \frac{2xy}{x+y} \geq 1 + \frac{1}{2}(\log_x y + \log_y x) \geq 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 \dots\dots\dots 2p$$

**Subiectul 2**

Fie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  astfel încât  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r, r \geq 1$  și  $\left| \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} + \frac{z_2 + z_3}{z_2 z_3} + \frac{z_3 + z_1}{z_3 z_1} \right| = 6$ .

Arătați că  $z_1 = z_2 = z_3$ .

**Prof. Ion Gușatu**

**Barem:**

Egalitatea din enunț se scrie echivalent

$$\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = 3 \Leftrightarrow |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 3r^3 \leq |z_1 z_2| + |z_2 z_3| + |z_3 z_1| = 3r^2 \dots\dots\dots 4p$$

Obținem  $r \leq 1$  dar  $r \geq 1 \Rightarrow r = 1$ ..... 1p

În acest caz  $\frac{1}{z_i} = \bar{z}_i$  cu  $i=1,3 \Rightarrow$

$$|\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = 3 \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 3 \text{ dar } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \Rightarrow z_1 = z_2 = z_3 \dots 2p$$

### Subiectul 3

Să se rezolve ecuația:  $11^{\log_{13}(x^2+x+1)} + 2 = 13^{\log_{11}(x^2+x-1)}$ .

**Prof. Ion Gușatu**

#### Barem:

Din condițiile de existență avem

$$x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right) \dots 1p$$

**Notăm**  $\log_{13}(x^2+x+1)=t$  și  $\log_{11}(x^2+x-1)=u$  de unde obținem:

$$x^2+x+1=13^t; x^2+x-1=11^u \dots 1p$$

Scriind cele două relații rezultă  $11^u + 2 = 13^t$  iar din ecuație  $11^t + 2 = 13^u \dots 1p$

Aceste două relații ne conduc la egalitatea  $11^t + 13^t = 11^u + 13^u \dots 1p$

Cum funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 11^x + 13^x$  este strict crescătoare avem  $f$  este injectivă.  $\dots 1p$

Deci, din  $f(t) = f(u)$  rezultă  $t=u$  rezultă  $11^u + 2 = 13^u \Leftrightarrow \left(\frac{11}{13}\right)^u + 2\left(\frac{1}{13}\right)^u = 1$  cu soluția unică

$$u=1 \dots 1p$$

Revenind la notația făcută obținem:  $x^2+x-12=0$  cu soluțiile  $x=-4, x=3 \dots 1p$

### Subiectul 4

Să se rezolve ecuația:  $\sqrt[3]{7x-6} + \sqrt[3]{x^2-10x+8} = \sqrt[3]{x^2-3x-6} + 2$ .

**G.M.**

#### Barem:

$$\text{Fie } a = \sqrt[3]{7x-6}, b = \sqrt[3]{x^2-10x+8}, c = \sqrt[3]{x^2-3x-6} \dots 1p$$

Avem  $a+b=c+2$  și  $a^3+b^3=x^2-3x+2=c^3+8$ , deci  $3ab(a+b)=3c \cdot 2(c+2)$ . De aici  $\Rightarrow c+2=0$  sau  $ab=2c \dots 2p$

Dacă  $c=-2$ , atunci  $c^3+8=0$  și  $x^2-3x+2=0$  cu soluțiile  $x_1=1$  și  $x_2=2 \dots 1p$

Dacă  $ab=2c$ , cum  $a+b=c+2$ , rezultă  $a=2, b=c$  sau  $b=2, a=c \dots 1p$

În primul caz regăsim soluția  $x=2$ , iar în al doilea caz obținem  $x_3=0$  și  $x_4=10 \dots 1p$

Deci  $x \in \{0, 1, 2, 10\}$

$\dots 1p$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
25 FEBRUARIE 2018  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE

**Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**

**Clasa a XI-a**

**Subiectul 1**

Se consideră matricile  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2018 & 1 & 2017 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Să se demonstreze că imaginea,  $\text{Im } f$ , a funcției  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(n) = \det(nA - A^n)$ , este mulțimea numerelor naturale, cuburi perfecte.

b) Să se arate că matricile  $(2I_3 - A)$  și  $\frac{1}{2}(3I_3 - A^2)$  sunt inversabile și  $(2I_3 - A)^{-1} = \left[ \frac{1}{2}(3I_3 - A^2) \right]^{-1}$ .

**Prof. Pepino Dincă**

**Barem:**

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 \cdot 2018 & 1 & 2 \cdot 2017 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2018 & 1 & 2017 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A - I_3,$$

$$A^3 = 3A - 2I_3 \dots\dots\dots 1p$$

$$A^n = nA - (n-1)I_3 \text{ (inducție matematică)} \dots\dots\dots 2p$$

$$\det(nA - A^n) = \det((n-1)I_3) = (n-1)^3$$

Fie  $a \in \mathbb{N}$  un cub perfect. Atunci  $\exists k \in \mathbb{N}$  astfel încât  $a = k^3$  ..... 1p

$(n-1)^3 = k^3 \Rightarrow n = k+1$ , deci mulțimea valorilor funcției acoperă mulțimea tuturor numerelor naturale, cuburi perfecte. .... 1p

b) avem relația obținută prin raționamentul de la punctul a),  $nA - A^n = (n-1)I_3$ ,  
 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$A(nI_3 - A^{n-1}) = (nI_3 - A^{n-1})A = (n-1)I_3$$

pentru  $n = 2$  și  $n = 3$  avem că  $A(2I_3 - A) = (2I_3 - A)A = I_3$ , respectiv  $A \left[ \frac{1}{2} (3I_3 - A^2) \right] = \left[ \frac{1}{2} (3I_3 - A^2) \right] A = I_3$

Din ultimele relații obținem concluzia:  $(2I_3 - A)^{-1} = \left[ \frac{1}{2} (3I_3 - A^2) \right]^{-1} = A$  .....2p

## Subiectul 2

Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( e \cos \frac{1}{n} \right) \cdot \ln \left( e \left( \cos \frac{1}{n} \right)^2 \right) \cdot \ln \left( e \left( \cos \frac{1}{n} \right)^3 \right) \cdot \dots \cdot \ln \left( e \left( \cos \frac{1}{n} \right)^{2018} \right) - 1}{\cos \frac{1}{n} - 1}$

Prof. Pepino Dincă

Barem:

Notăm  $x_n = \cos \frac{1}{n}$ ,  $x_n \rightarrow 1$ , dacă  $n \rightarrow \infty$  .....1p

Notăm

$$\begin{aligned} L_{2018} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e x_n) \ln(e (x_n)^2) \ln(e (x_n)^3) \dots \ln(e (x_n)^{2018}) - 1}{x_n - 1} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e x_n) \ln(e (x_n)^2) \ln(e (x_n)^3) \dots \ln(e (x_n)^{2018}) - \ln(e (x_n)^{2018}) + \ln(e (x_n)^{2018}) - 1}{x_n - 1} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e (x_n)^{2018}) [\ln(e x_n) \ln(e (x_n)^2) \ln(e (x_n)^3) \dots \ln(e (x_n)^{2017}) - 1]}{x_n - 1} + \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e (x_n)^{2018}) - 1}{x_n - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot [\ln(e x_n) \ln(e (x_n)^2) \ln(e (x_n)^3) \dots \ln(e (x_n)^{2017}) - 1]}{x_n - 1} + \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e (x_n)^{2018}) - 1}{x_n - 1} &= L_{2017} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e (x_n)^{2018}) - 1}{x_n - 1} = \\ L_{2017} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2018 \cdot \ln x_n - 1}{x_n - 1} &= L_{2017} + 2018 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[(x_n - 1) + 1]}{x_n - 1} = L_{2017} + 2018 \end{aligned}$$

$$L_{2018} = L_1 + 2017 \cdot 2018 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln x_n) - 1}{x_n - 1} + 2017 \cdot 2018 =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[(x_n - 1) + 1]}{x_n - 1} + 2017 \cdot 2018 = 1 + 2017 \cdot 2018 = 4070307$$



**Subiectul 3**

Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$ , un șir de numere reale pentru care există  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_{n+1} \in \mathbb{R}$  și care satisface relația

$$\frac{1 - (n-1) \cdot a_n}{1 + (n-1) \cdot a_n} = \frac{1 + n \cdot a_{n+1}}{1 - n \cdot a_{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \text{ Calculați } a_{2018}.$$

**Prof. Pepino Dincă**

**Barem:**

$$[1 - (n-1) \cdot a_n][1 - n \cdot a_{n+1}] = [1 + (n-1) \cdot a_n][1 + n \cdot a_{n+1}], \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

După calcul și reducerea termenilor asemenea obținem că

$$n \cdot a_{n+1} = -(n-1) \cdot a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Notăm } b_n = n \cdot a_{n+1} \Rightarrow b_n = -b_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$\text{Apoi, iterând } \Rightarrow b_n = -b_{n-1} = -(-b_{n-2}) = b_{n-2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \dots\dots\dots 1p$$

Obținem așadar că șirul  $(b_n)_n$  este un șir periodic de perioadă 2 și conform ipotezei

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_{n+1} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq b \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Aceasta înseamnă că șirul } (b_n)_n \text{ este șir constant și } b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq b \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Într-adevăr, din periodicitatea șirului avem că } b_{n+2k} = b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Trecând la limita după } k \rightarrow \infty, \text{ obținem că } \lim_{k \rightarrow \infty} b_{n+2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_n = b_n = b, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Din } b_n = -b_{n-1} \Rightarrow b = -b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow n \cdot a_{n+1} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2017 \cdot a_{2018} = 0$$

$$\text{Obținem că } a_{2018} = 0. \dots\dots\dots 1p$$

**Subiectul 4**

Fie  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , nu toate nule și  $k \in \mathbb{Z}$ . Demonstrați că dacă determinantul 
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ kc & a & b \\ kb & kc & a \end{vmatrix} = 0,$$
 atunci

$k$  este cub perfect

**G.M. 11/2017**

**Barem:**

$$a^3 + kb^3 + k^2c^3 - 3kabc = 0. \dots\dots\dots 1p$$

Folosind relația de mai sus și identitatea

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) \frac{1}{2} [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2],$$

$$\text{unde punem } a = x, \sqrt[3]{k}b = y, \sqrt[3]{k^2}c = z, \dots\dots\dots 2p$$

vom avea două cazuri:



i)  $x = y = z \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{k}b = \sqrt[3]{k^2}c$  și din motivul că  $a, b, c$ , nu sunt toate nule, iar  $\sqrt[3]{k}$ ,  $\sqrt[3]{k^2}$ , nu pot fi iraționale, obținem că numărul întreg  $k$  este cub perfect.....1p

ii) 
$$\begin{cases} a + \sqrt[3]{k}b + \sqrt[3]{k^2}c = 0 \mid (\cdot b) \\ a + \sqrt[3]{k}b + \sqrt[3]{k^2}c = 0 \mid \cdot (-\sqrt[3]{k}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$-kc - \sqrt[3]{k}a - \sqrt[3]{k^2}b = 0 \mid (\cdot c) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ab + \sqrt[3]{k}b^2 + \sqrt[3]{k^2}bc = 0 \\ -kc^2 - \sqrt[3]{k}ac - \sqrt[3]{k^2}bc = 0 \end{cases}$$

Prin adunarea ultimelor relații  $\Rightarrow (ab - kc^2) + \sqrt[3]{k}(b^2 - ac) = 0$ .....2p

Dacă numărul  $k$  nu este cub perfect, atunci  $\sqrt[3]{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  și obținem  $ab - kc^2 = b^2 - ac = 0$ , și din faptul că  $a, b, c$  nu sunt toate nule, avem că  $\left(\frac{b}{c}\right)^3 = k$ , deci și în această situație,  $k$  este cub perfect .....1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
25 FEBRUARIE 2018  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE DE CORECTARE

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

**Clasa a XII-a**

**Subiectul 1**

Determinați primitivele funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

**Prof. Emil Ciolan**

**Barem:**

Funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ , deci admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .

$$\int f(x) dx = \int \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int x' \cdot \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1} dx = x \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1} - \int x \left( \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1} \right)' dx$$

.....1p

Cum  $\left( \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \begin{cases} -\frac{2}{x^2 + 1}, & x \in (-\infty, -1) \\ \frac{2}{x^2 + 1}, & x \in (-1, 1) \\ -\frac{2}{x^2 + 1}, & x \in (1, \infty) \end{cases}$  deducem că primitivele funcției sunt de forma:

$$F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} x \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1) + c_1, & x \in (-\infty, -1) \\ k_1, & x = -1 \\ x \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1) + c_2, & x \in (-1, 1) \\ k_2, & x = 1 \\ x \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1) + c_3, & x \in (1, \infty) \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

În continuare impunem condiția de continuitatea a funcțiilor  $F$  în punctele  $x = -1$  și  $x = 1$ .

Obținem:  $k_1 = \lim_{x \nearrow -1} F(x) = \lim_{x \searrow -1} F(x)$ , deci  $k_1 = \frac{\pi}{2} + \ln 2 + c_1 = \frac{\pi}{2} - \ln 2 + c_2$  și

$k_2 = \lim_{x \nearrow 1} F(x) = \lim_{x \searrow -1} F(x)$ , adică  $k_2 = \frac{\pi}{2} - \ln 2 + c_2 = \frac{\pi}{2} + \ln 2 + c_3$ . Notând  $c_2 = c \in \mathbb{R}$  deducem că  $c_1 = c - 2\ln 2$  și  $c_3 = c - 2\ln 2$  ..... 2p

Prin urmare,

$$F(x) = \begin{cases} x \arcsin \frac{2x}{x^2+1} + \ln(x^2+1) - 2\ln 2 + c, & x \in (-\infty, -1) \\ \frac{\pi}{2} - \ln 2 + c, & x = -1 \\ x \arcsin \frac{2x}{x^2+1} - \ln(x^2+1) + c, & x \in (-1, 1) \\ \frac{\pi}{2} - \ln 2 + c, & x = 1 \\ x \arcsin \frac{2x}{x^2+1} + \ln(x^2+1) - 2\ln 2 + c, & x \in (1, \infty) \end{cases} \quad \dots\dots\dots 1p$$

Se verifică imediat că funcțiile  $F$  sunt și derivabile în punctele  $x = -1$  și  $x = 1$  ..... 1p

## Subiectul 2

Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție care admite primitive. Demonstrați că funcția  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$g(x) = f(2018^x)$  admite primitive.

**Prof. Emil Ciolan**

### Barem:

Fie  $F$  o primitivă a funcției  $f$  ..... 1p

Funcția  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $G(x) = \frac{F(2018^x)}{2018^x}$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  ..... 2p

$$\text{și } G'(x) = \frac{2018^x F'(2018^x) \cdot 2018^x \ln 2018 - 2018^x \ln 2018 F(2018^x)}{2018^{2x}} = \dots\dots\dots 2p$$

$$= f(2018^x) \ln 2018 - G(x) \ln 2018$$

Prin urmare,  $f(2018^x) = G(x) + \frac{1}{2018} G'(x)$  și, cum funcțiile  $G(x)$  și  $\frac{1}{2018} G'(x)$  admit primitive, rezultă că funcția  $g$  admite primitive ..... 2p

### Subiectul 3

Fie  $(G, \cdot)$  un grup cu proprietatea că funcțiile  $f : G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^3$  și  $g : G \rightarrow G$ ,  $g(x) = x^5$  sunt endomorfisme ale lui  $G$ . Să se arate că  $(G, \cdot)$  este grup abelian.

**Prof. Emil Ciolan**

#### Barem:

$f : G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^3$  endomorfism implică  $(xy)^3 = x^3y^3$  și  $(yx)^3 = y^3x^3$  ..... 1p

$(yx)^3 = y^3x^3 \Rightarrow y(xy)^2x = y^3x^3 \Rightarrow (xy)^2 = y^2x^2$ ; ..... 1p

$(xy)^3 = x^3y^3$   
 $(xy)^3 = (xy)^2xy = y^2x^2(xy) = y^2x^3y \left\{ \Rightarrow x^3y^3 = y^2x^3y \Rightarrow x^3y^2 = y^2x^3, \forall x, y \in G \right. (*)$   
 .....2p

$g : G \rightarrow G$ ,  $g(x) = x^5$  endomorfism implică  $(xy)^5 = x^5y^5 \Rightarrow (xy)^3(xy)^2 = x^5y^5$   
 $\Rightarrow x^3y^3(xy)^2 = x^5y^5 \Rightarrow y^3(xy)^2 = x^2y^5, \forall x, y \in G \quad (**)$  .....1p

Dar, în baza relației (\*), avem  $y^3(xy)^2 = (xy)^2y^3, \forall x, y \in G \quad (***)$ . .....1p

Relațiile (\*\*) și (\*\*\*) conduc la  $x^2y^5 = (xy)^2y^3$  sau, încă,  $x^2y^5 = xyxy^4$ , de unde, prin simplificare, obținem  $xy = yx, \forall x, y \in G$ . .....1p

### Subiectul 4

Fie  $G$  un grup finit de ordin  $n$ . Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente.

- Ecuatia  $x^2 = a$  are soluții în  $G$ , pentru orice  $a \in G$ .
- $n$  este număr impar.

**G.M.B 6-7-8/2016**

#### Barem:

$a) \Rightarrow b)$  Presupunem că  $n$  este număr par. Există  $a \in G - \{e\}$  astfel încât  $a^2 = e$ , unde  $e$  este elementul neutru al grupului  $G$ . Conform enunțului, funcția  $f : G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^2$  este surjectivă și, cum  $G$  este mulțime finită, rezultă că  $f$  este injectivă. Din  $e = f(e) = f(a)$  rezultă că  $a = e$ , contradicție. Prin urmare,  $n$  este număr impar. ....5p

$b) \Rightarrow a)$  Fie  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  și  $a \in G$ . Cum  $a^{2k+1} = e$  rezultă  $a^{2k+2} = a$ , deci  $(a^{2k+1})^2 = a$ . Prin urmare ecuația  $x^2 = a$  are soluții în  $G$ , pentru orice  $a \in G$  .....2p