**INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU**

# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
## ETAPA LOCALĂ, 24.02.2018
## Clasa a XII-a

**1.** Pentru orice $n \in N^*$ se definește $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$.

**(4p) a)** Calculați $I_1$ şi $I_3$.

**(3p) b)** Arătați că $\frac{\sqrt{2}-1}{2} < I_2 < \ln\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

**2.** Se consideră $C = \{ f : R \to R \mid f \text{ continuă} \}$. Ştiind că mulţimea $C$ este un inel faţă de adunarea şi înmulţirea funcţiilor, demonstraţi că:

**(4p) a)** o funcţie $f \in C$ este element inversabil în inelul $C$ dacă şi numai dacă $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in R$.

**(3p) b)** o funcţie $f \in C$ care nu este funcţia nulă şi pentru care există $a, b \in R,\ a < b$, astfel încât $f(x) = 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, este divizor al lui zero în inelul $C$.

**3. (7p)** $(M, \cdot)$ este un monoid cu elementul neutru $e$, având proprietatea că pentru orice $x \in M \setminus \{e\}$, există $y \in M \setminus \{e\}$ astfel încât elementul $xy$ este inversabil. Arătați că $(M, \cdot)$ este grup.

**4.** Se consideră funcția $f : [0, 1] \to R$, definită prin $f(x) = \frac{1}{n}$ pentru $x \in \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$, $\forall n \in N^*$ şi $f(0) = 0$. Demonstrați că:

**(3p) a)** $f$ nu admite primitive, dar este integrabilă pe $[0, 1]$.

**(4p) b)** $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi^2}{6} - 1$.

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.