INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2018
Clasa a XI-a

1. (7p) Determinați parametrii reali a, b, astfel încât $f : R \to R,\ f(x) = \sqrt[3]{ax^3 - bx^2}$ să admită asimptota de ecuație $y = 2x - \frac{1}{3}$.

2. (7p) Se dau punctele $A(1,3), B(3,2)$ şi $C(4,0)$. Determinaţi mulţimea punctelor $M(x, y)$ din plan cu proprietatea $A_{[MAB]} = A_{[MBC]}$.

3. Se consideră matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_n(R)$, astfel încât $A + B = AB, B + C = BC$ şi $C + A = CA$.
Arătaţi că:
(3p) a) $A - I_n, B - I_n$ şi $C - I_n$ sunt inversabile;
(4p) b) $4(A + B + C) = 3ABC$.

4. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\in N}$ este definit prin $x_{n+1} = x_n + e^{-2018 x_n}$ pentru $n \in N$, $x_0 = 2017$.
(3p) a) Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\in N}$ este strict crescător şi nemărginit;
(4p) b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2018)}{x_n}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.