INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2018
Clasa a X-a

1. (7p) Se consideră funcția $f:R\to R$ cu proprietatea $7f(x)-63x=16f([x])+16f(\{x\})-25$, pentru orice număr real *x*, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x*, iar $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui *x*. Arătați că funcția *f* este monotonă și inversabilă.

2. (7p) Dacă $a,b\in(-1,3)$, astfel încât $\log_{\frac{1}{2}}\frac{4-a}{5}\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{2+b}{5}=1$, determinați valoarea minimă pe care o poate lua expresia $E(a,b)=ab+2a-4b$.

3. (7p) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $2^{3x}-8\cdot2^{-3x}-6\cdot\left(2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=1$.

4. (7p) În hexagonul convex $ABCDEF$ punctele M,N,P,Q,R,S sunt mijloacele laturilor $[AB],[BC],[AF],[DE],[CD]$, respectiv $[EF]$. Dacă G_1,G_2,G_3,G_4 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor MNP, BCD, QRS, respectiv AEF, demonstrați că patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.