

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 24.02.2018

Clasa a VIII-a

1. (4p) a) Pentru $a=10^x$, $b=7^x$, $\left|\frac{6x+5}{4}\right| \leq 2$ și $x \in \mathbb{Z}$, calculați $[a-b]$, unde $[t]$ reprezintă partea întreagă a numărului real t .

(3p) b) Arătați că $\sqrt{100^x - 2 \cdot 70^x + 49^x} + \sqrt{49^x} - \sqrt{\sqrt{10000^x}}$ este număr natural, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

2. Demonstrați că:

(4p) a) $5x^2 + 2y^2 - 6xy + 12x - 6y \geq -9$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(3p) b) Restul împărțirii pătratului unui număr natural la 4 poate fi 0 sau 1.

3. În triunghiul dreptunghic ABC , $m(A) = 90^\circ$, M este mijlocul segmentului $[BC]$, $AC = 12$ cm și $AM = 10$ cm. Pe planul triunghiului se ridică perpendiculara MP , unde $MP = 8$ cm. Se consideră punctele T și S proiecțiile punctului M pe AC , respectiv pe AB , $T \in (AC)$, $S \in (AB)$.

Aflați:

(4p) a) Distanța de la punctul P la dreapta AC .

(3p) b) Distanța de la punctul M la planul (PST) .

4. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = 4$ cm și $BC' \cap CB' = \{O'\}$.

(4p) a) Dacă $\{P\} = AO' \cap D'C'$, determinați distanța de la punctul P la dreapta AC .

(3p) b) Dacă $\{O\} = AB' \cap A'B$ și punctul $M \in (BB')$ astfel încât $\sin \angle BOM = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, determinați lungimea segmentului $[BM]$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.