INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2018
Clasa a VII-a

1. (7p) Demonstrați că dacă d și m sunt cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun ale numerelor naturale nenule a și b, atunci $d+a+b=m$ dacă și numai dacă $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{m}=\frac{1}{d}$.

2. (7p) Se dau numerele: $a=1\cdot 2+2\cdot 3+...+99\cdot 100$ și $b=\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{2+2^2}+\frac{1}{3+3^2}+...+\frac{1}{k+k^2}$.

Determinați numărul natural k, știind că $10^6+10^4=\frac{3a}{b}$.

3. În triunghiul ABC cu $AB=\sqrt{2}-1$ cm și $AC=\sqrt{2}+1$ cm, bisectoarea unghiului BAC intersectează latura $[BC]$ în punctul D.

(3p) a) Aflați raportul ariilor triunghiurilor ABD și ACD.

(4p) b) Dacă O este mijlocul laturii $[BC]$, iar simetricele punctului A față de punctele D și O, se notează cu M, respectiv N, comparați ariile patrulaterelor $ABMC$ și $ABNC$.

4. (7p) Pe dreptele suport ale laturilor patrulaterului convex $ABCD$ se consideră punctele coliniare E, F, G și H astfel încât $E\in(BA$, $F\in[AD]$, $G\in[CD]$ și $H\in(BC$.

Demonstrați relația: $\frac{EA}{EB}\cdot\frac{HB}{HC}\cdot\frac{GC}{GD}\cdot\frac{FD}{FA}=1$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.