Barem de corectare OLM 2018 Clasa a XII-a

P1 – autor ***

a) $I_1=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)\Big\vert_0^1=\ln\sqrt{1+\sqrt{2}}$	**2p**
$I_3=\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}\Big\vert_0^1=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	**2p**
b) $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\geq\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}\geq\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}$ pentru orice $x\in[0,1]$	**1p**
Inegalităţile sunt stricte pentru un punct oarecare din interiorul intervalului.	**1p**
Funcţiile fiind continue, rezultă $I_3<I_2<I_1$, adică inegalităţile cerute.	**1p**

P2 – autor ***

2. a) Dacă f este element inversabil, există $g\in C$ astfel încât $fg=1$.	**1p**
$f(x)g(x)=1,\ \forall x\in R$, de unde $f(x)\neq 0,\ \forall x\in R$	**1p**
Cum $f(x)\neq 0,\ \forall x\in R$, se poate defini $g:R\to R,\ g(x)=1/f(x),\ \forall x\in R$.	**1p**
$g\in C$ şi $f(x)g(x)=g(x)f(x)=1,\ \forall x\in R$, adică $fg=gf=1$	**1p**
b) Fie $g:R\to R,\ g(x)=0$ dacă $x\notin[a,b]$ şi $g(x)=(x-a)(x-b),\ \forall x\in[a,b]$	**1p**
g este continuă.	**1p**
Cum $f\neq 0,\ g\neq 0$ şi $fg=0$, rezultă că f şi g sunt divizori ai lui zero.	**1p**

P3 – autor Traian Preda (GM)

Elementul e este inversabil. Arătăm că orice $x\in M\setminus\{e\}$ este inversabil.	**1p**
Pentru $x\in M\setminus\{e\}$ $\exists y\in M\setminus\{e\}$, $\exists z\in M$ astfel încât $(xy)z=e$, deci $x(yz)=e$	**1p**
Deci orice $x\in M\setminus\{e\}$ are un invers la dreapta.	**1p**
Fie x' inversul la dreapta al lui x şi x'' inversul la dreapta al lui x', deci $xx'=e,\ \ x'x''=e$	**1p**
Avem $x=xe=x(x'x'')=(xx')x''=ex''=x''$	**1p**
Din $x'x''=e$ rezultă acum $x'x=e$.	**1p**
$xx'=e,\ x'x=e$, deci x este inversabil.	**1p**

P4 – autor Martin Bottesch

4. a) Avem, de exemplu, $f\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)=\left\{\frac{1}{2},1\right\}$, care nu este interval, deci f nu are proprietatea lui Darboux, prin urmare nu admite primitive.	**2p**
Funcţia f este monotonă pe $[0,1]$, deci este integrabilă.	**1p**
b) Notând $I=\int_0^1 f(x)\,dx$ şi $I_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^1 f(x)\,dx$, avem $I=\lim_{n\to\infty}I_n$	**1p**
$I_n=\sum_{k=1}^n\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}\frac{1}{k}dx=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k(k+1)}$	**1p**
Prima sumă are limita $\pi^2/6$ (Euler), iar a doua tinde către 1, când $n\to\infty$, de unde afirmaţia.	**2p**