Barem de corectare OLM 2018 Clasa a XI-a

P1 – manual

Din formulele corespunzătoare asimptotei oblice: $2=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{ax^3-bx^2}{x^3}}=\sqrt[3]{a}\Rightarrow a=8$	**3p**
$-\frac{1}{3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-bx^2}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-bx^2}{\left(\sqrt[3]{8x^3-bx^2}\right)^2+2x\sqrt[3]{8x^3-bx^2}+4x^2}=-\frac{b}{12}\Rightarrow b=4$	**4p**

P2 – autor ***

Formula ariei unui triunghi: $S=\frac{1}{2}\cdot\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$	**1p**
Egalitatea celor două arii conduce la $\lvert x+2y-7\rvert=\lvert 2x+y-8\rvert$.	**3p**
$(x+2y-7)^2-(2x+y-8)^2=0\Leftrightarrow(x-y-1)\cdot(x+y-5)=0\Leftrightarrow x-y-1=0$ sau $x+y-5=0$	**3p**
Mulţimea căutată este reuniunea $d_1\cup d_2$, unde $d_1: x-y-1=0$, $d_2: x+y-5=0$.	**1p**

P3 – autor Doru Isac

a) $AB-A-B=O_n \,\vert +I_n\Rightarrow AB-A-B+I_n=I_n\Rightarrow(A-I_n)(B-I_n)=I_n$, deci $A-I_n$ şi $B-I_n$ sunt inversabile; analog pentru matricea $(C-I_n)$.	**3p**
Dacă $(A-I_n)(B-I_n)=I_n$, atunci şi $(B-I_n)(A-I_n)=I_n$, de unde $BA=A+B$ şi astfel $AB=BA$; analog $BC=CB$ şi $CA=AC$.	**1p**
$4(A+B+C)=(2A+2B)+(2B+2C)+(2C+2A)=2AB+2BC+2CA=$ $=(AB+CB)+(BC+AC)+(CA+BA)=(A+C)\cdot B+(C+B)\cdot A+(B+A)\cdot C$ $=ACB+BAC+CBA=3ABC$	**3p**

P4 – autor Mihaela Berindeanu (GM)

a) $x_{n+1}-x_n=e^{-2018x_n}>0\Rightarrow(x_n)_{n\in N^*}$ strict crescător	**1p**
Orice şir monoton are o limită $l\in\overline{R}$.	**1p**
Dacă şirul ar fi mărginit, atunci $l\in R$; trecând la limită în relația de recurenţă se obţine $l=l+e^{-2018l}$, ceea ce este imposibil. În concluzie, şirul este nemărginit, cu limita ∞.	**1p**
b) Fiind îndeplinite condițiile lemei Stoltz-Cesaro, se calculează $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2019)-\ln(n+2018)}{x_{n+1}-x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+2018}\right)}{\frac{1}{n+2018}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{2018x_n}}{n+2018}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{2018x_n}}{n+2018}$.	**1p**
Aplicând din nou lema, se obţine succesiv: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{2018x_{n+1}}-e^{2018x_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{2018x_n}\cdot\left(e^{2018(x_{n+1}-x_n)}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{2018x_n}\cdot\left(\frac{e^{2018\cdot e^{-2018x_n}}-1}{2018e^{-2018x_n}}\right)\cdot\frac{2018}{e^{2018x_n}}=2018$	**2p**
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2018)}{x_n}=2018$	**1p**