Barem de corectare OLM 2018 Clasa a IX-a

P1 – autor ***

I. Din $x, y \geq 1$ şi $n \geq 2$ rezultă $\frac{x}{1+x^n}+\frac{y}{1+y^n} \leq \frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}$.	**3p**
Deci este suficient să demonstrăm $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2} \leq 2$.	**1p**
Din $2x \leq 1+x^2$ şi $2y \leq 1+y^2$ se obţine concluzia.	**3p**
II. Demonstrăm $\frac{x}{1+x^n} \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $x \geq 1$ şi $n \geq 2$, echivalentă cu $x^n - 2x + 1 \geq 0$.	**3p**
Dar $x^n - 2x + 1 \geq x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$	**3p**
Prin adunarea inegalităţilor $\frac{x}{1+x^n} \leq \frac{1}{2}$ şi $\frac{x}{1+y^n} \leq \frac{1}{2}$ se obţine concluzia.	**1p**

P2 – autor Florin Rotaru (GM)

I. Folosind metoda inducției matematice, se verifică propoziția în cazul $n = 0$.	**1p**
Presupunând proprietatea adevărată pentru un număr natural $n \geq 0$, atunci $16^n + 4^n - 2 = 9k, k \in N$.	**2p**
$16^{n+1} + 4^{n+1} - 2 = 9 \cdot 16k - 3(4^{n+1} - 1 - 9)$	**2p**
Întrucât $4^{n+1} - 1$ se divide cu 3 , rezultă că $16^{n+1} + 4^{n+1} - 2$ se divide cu 9, proprietatea este adevărată și pentru $n+1$. În concluzie, este adevărată pentru orice număr natural.	**2p**
II. $N = 16^n + 4^n - 2 = (4^n - 1)(4^n + 2)$	**3p**
$4^n - 1 = 3k, k \in N$	**2p**
$N = 9k(k+1)$, deci este divizibil cu 9.	**2p**

P3 – manual

Dacă $\overrightarrow{AE} = \vec{a},\ \overrightarrow{AC} = \vec{b}$, atunci $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.	**2p**
$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(2\vec{a} + 2\overrightarrow{b}) = \frac{2}{3}(\vec{a} + \overrightarrow{b})$	**2p**
$\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AF}$	**2p**
Rezultă că $3AD = 4AF$ și punctele *A, F, D* sunt coliniare.	**1p**
Obs. Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.	

P4 – autor Alin Pop

Numerele date sunt de forma: a, aq^m, aq^p cu $m, p \in N^*$, $p > m, q > 0, a \in N^*$ **.**	**1p**
Deoarece $(aq^m)^p = (aq^p)^m a^{p-m}$ se deduce că pot exista trei situații: toate cele trei numere pare, toate cele trei numere impare sau două numere pare și unul impar.	**2p**
Cum ultimele două situații ar conduce la sumă impară, rezultă concluzia cerută.	**1p**
Din 5 numere dacă doar unul este impar, atunci suma lor nu mai poate fi pară.	**1p**
Dacă două numere sunt impare, alegem unul din restul numerelor şi aplicăm cele de mai sus pentru cele două numere şi cel ales. Rezultă că al treilea ales trebuie să fie tot impar. Dar atunci toate cele 5 numere sunt impare, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare toate cele 5 numere sunt pare.	**2p**
Obs. Rația progresiei nu este in mod necesar un număr natural. Considerarea doar a acestui caz se va puncta cu maxim jumătate din punctajul aferent fiecărei cerințe.	