



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 17.02.2018

Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1

Fie (G, \cdot) un grup multiplicativ și a un element din G . Se definește funcția $f_a : G \rightarrow G$, $f_a(x) = xa^{-1}$

a) Să se arate că f_a este o funcție bijectivă, pentru orice $a \in G$.

b) Să se arate că mulțimea $M = \{f_a \mid a \in G\}$ împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează un grup.

* * *

SUBIECTUL 2

Fie (G, \cdot) un grup finit și abelian cu e element neutru. Să se arate că numărul soluțiilor ecuației $x^n = e$, unde $n \in \mathbf{N}^*$, divide ordinul grupului.

Zîrnă Cătălin

SUBIECTUL 3

Fie $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2xe^{x^2}$. Determinați o funcție $g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ cu proprietatea că există o primitivă G a lui g și o primitivă F a lui f astfel încât FG să fie o primitivă a funcției fg .

* * *

SUBIECTUL 4

Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o funcție strict crescătoare și $I_n = \int_0^1 (f(x))^n dx$, $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

b) Demonstrați că pentru orice $a \in (0, 1)$ are loc inegalitatea: $I_n \leq a \cdot (f(a))^n + 1 - a$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

Chichirim Nelu

Notă:

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7

Nu se acordă puncte din oficiu