



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2018

Clasa a XI-a

### SUBIECTUL 1

Fie  $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ ,  $A \neq B$ . Să se arate că dacă  $A^2 = B^2$  și  $A^3 = B^3$ , atunci  $A^n = B^n$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ .

### SUBIECTUL 2

Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x & 4x+1 & 3x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

- a) Demonstrați că  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + 4xy)$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{R}$
- b) Determinați  $m, n \in \mathbf{Z}$  astfel încât  $A(m) \cdot A(n) = A(-1)$ .
- c) Există matricea  $X \in M_3(\mathbf{R})$  pentru care  $X \cdot {}^tX = A\left(-\frac{1}{2}\right)$ ?

### SUBIECTUL 3

Se consideră șirul  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  definit prin  $x_{n+1} = x_n + \frac{2018}{x_n}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $x_0 = 1$ .

Calculați:

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{\sqrt{n}} \right)$

### SUBIECTUL 4

Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k+1}}{k(k+1)} \right)$ .

Cătălin Zîrnă

### Notă:

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7

Nu se acordă puncte din oficiu