



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapă locală – Constanța 17.02.2018

Clasa a XII-a

Filiera tehnologică: Profilul Tehnic – toate specializările,
Profilul Servicii: – specializarea Resurse Naturale și Protecția Mediului

SUBIECTUL 1

Pe mulțimea numerelor reale se definește lege de compoziție $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Să se arate că există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * y = 2(x-1)(y-1) + k$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$;
- b) Să se arate că există $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x * a = a * x = a$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$;
- c) Să se rezolve ecuația $x * x * x * x = 1$.

SUBIECTUL 2

- a) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G = \{A, A^2, A^3\}$. Să se studieze ce

structură algebrică este mulțimea G în raport cu înmulțirea matricelor.

- b) Fie grupurile $(\mathbb{Z}, *)$ și (\mathbb{Z}, \circ) , cu legile $x * y = x + y + 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$ și $x \circ y = x + y - 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $a + b = 3$, astfel încât $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$ să fie izomorfism de la grupul $(\mathbb{Z}, *)$ la grupul (\mathbb{Z}, \circ) .

SUBIECTUL 3

- a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $F: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (x+a)\ln(x+b)$ să fie o primitivă a funcției $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \ln(x+1)$.
- b) Să se arate că orice primitivă a funcției $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2^x$ este convexă pe \mathbb{R} .

SUBIECTUL 4

- a) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot e^{1-x} dx$
- b) Să se calculeze $\int_0^4 g(x) dx$, unde $g: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x-2|$.

Notă:

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu