



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2018

Clasa a IX-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

Rezolvați ecuația: $[x] + [x^2] = \{x\} + \{x^2\}$, $x \in \mathbf{R}$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a .

Cavachi Niculae

$[x] + [x^2] \in \mathbf{Z}$ și $\{x\} + \{x^2\} \in [0, 2) \Rightarrow [x] + [x^2] = \{x\} + \{x^2\} = 0$ sau 1 **2p**

i) $\{x\} + \{x^2\} = 0 \Rightarrow \{x\} = \{x^2\} = 0 \Rightarrow x, x^2 \in \mathbf{Z} \Rightarrow x + x^2 = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 0\}$ care verifică ecuația ... **2p**

ii) $[x] + [x^2] = \{x\} + \{x^2\} = 1 \Rightarrow [x] + [x^2] + \{x\} + \{x^2\} = 2 \Rightarrow x + x^2 = 2 \Rightarrow x \in \{-2, 1\}$ care nu verifică ecuația **2p**

Deci soluția este $\{-1, 0\}$ **1p**

SUBIECTUL 2

Să se arate că oricare ar fi $a, b, c > 0$ cu $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \geq 1$, atunci $a + b + c \geq \sqrt{3}$.

Zîrnă Cătălin

$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \leq \frac{a(b+c)}{2} + \frac{b(a+c)}{2} + \frac{c(a+b)}{2} = ab + bc + ca \Rightarrow ab + bc + ca \geq 1$ **2p**

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$ **2p**

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \geq 1 + 2 \cdot 1 = 3$ **2p**

$a + b + c \geq \sqrt{3}$ **1p**

SUBIECTUL 3

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale. Știind că $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ și că orice trei termeni consecutivi a_n, a_{n+1}, a_{n+2} ai șirului sunt în progresie aritmetică pentru n impar, respectiv în progresie geometrică pentru n par, să se determine formula termenului general.

* * *

$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 6, a_6 = 9, a_7 = 12, a_8 = 16$ **1p**

Demonstrăm, prin inducție matematică: $a_{2n+1} = n(n+1)$, $\forall n \in \mathbf{N}$ **1p**

i) $n = 0$ verifică

ii) Presupunem că $a_{2k+1} = k(k+1)$, $k \leq n$ și demonstrăm că $a_{2n+3} = (n+1)(n+2)$ **1p**

$$a_{2n-1} = (n-1)n, a_{2n+1} = n(n+1) \Rightarrow a_{2n} = \frac{a_{2n-1} + a_{2n+1}}{2} = n^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$a_{2n+1}^2 = a_{2n}a_{2n+2} \Rightarrow a_{2n+2} = (n+1)^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$a_{2n+2} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+3}}{2} \Rightarrow a_{2n+3} = (n+1)(n+2) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Așadar } a_{2n+1} = n(n+1), \forall n \in \mathbf{N} \text{ și } a_{2n} = n^2, \forall n \in \mathbf{N}^* \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 4

În patrulaterul convex $ABCD$ se notează cu G centrul de greutate al triunghiului BCD și cu H ortocentrul triunghiului ACD . Să se arate că $ABGH$ este paralelogram dacă și numai dacă G este centrul cercului circumscris triunghiului ACD .

* * *

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ACD

Cum H este ortocentrul, avem că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH}$ și din G centrul de greutate al triunghiului BCD , avem $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \dots\dots\dots 3p$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH} \Rightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO} \dots\dots\dots 1p$$

$$ABGH \text{ paralelogram} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{GB} \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} \Leftrightarrow \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow G = O \dots\dots 2p$$

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .