



## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2018

Clasa a VIII-a

### Barem de corectare și notare

#### SUBIECTUL 1.

a) Determinați perechile de numere întregi care verifică inegalitatea:  $x^2 + y^2 + 3 \leq 2(x - 2y)$

b) Fie numerele reale  $x$  și  $y$  astfel încât  $x^2 + y^2 + 3 \leq 2(x - 2y)$ .

Demonstrați că  $y < x$  și  $x + y \in [-3; 1]$ .

#### SOLUȚIE

a)  $x^2 + y^2 + 3 - 2x + 4y \leq 0$ ;  $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 2 \leq 0$

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 2$  ..... 1p

$x - 1 \in \mathbb{Z}, y + 2 \in \mathbb{Z}, \Rightarrow (x - 1; y + 2) \in \{(0; 0); (1; 0); (-1; 0); (0; 1);$

$(0; -1); (1; 1); (-1; -1); (1; -1); (-1; 1)\} \Rightarrow$

$(x; y) \in \{(1; -2); (2; -2); (0; -2); (1; -1); (1; -3); (2; -1); (0; -3); (2; -3); (0; -1)\}$  ..... 2p

b)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x - 1 \leq \sqrt{2}$  și  $-\sqrt{2} \leq y + 2 \leq \sqrt{2}$  ..... 1p

$-\sqrt{2} + 1 \leq x \leq \sqrt{2} + 1$  și  $-\sqrt{2} - 2 \leq y \leq \sqrt{2} - 2$

Dar  $\sqrt{2} - 2 < -\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 3$ . Rezultă  $y < x$  ..... 1p

$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2), (\forall) a, b \in \mathbb{R}$

$(x - 1 + y + 2)^2 \leq 2[(x - 1)^2 + (y + 2)^2] \leq 4$  ..... 1p

$(x + y + 1)^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x + y + 1 \leq 2 \Rightarrow -3 \leq x + y \leq 1 \Rightarrow x + y \in [-3; 1]$  ..... 1p

#### SUBIECTUL 2.

Se consideră numerele:

$A = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{4} + \sqrt{3}) \dots (\sqrt{2019} - \sqrt{2018})$  și

$B = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{4} - \sqrt{3}) \dots (\sqrt{2019} + \sqrt{2018})$

a) Să se calculeze  $A \cdot B$  și să se arate că  $A + B > 2$ .

b) Să se calculeze  $\left[\frac{B}{1010 \cdot A}\right]$ , unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului  $x$ .

#### SOLUȚIE

a)  $A \cdot B = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \dots (\sqrt{2019} - \sqrt{2018})(\sqrt{2019} + \sqrt{2018}) = 1 \cdot \dots \cdot 1 = \dots$  2p

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, (\forall) a, b \geq 0$ , egalitatea are loc pentru  $a=b$  ..... 1p

$A + B \geq 2\sqrt{AB}, A \cdot B = 1 \Rightarrow A + B \geq 2$  ..... 1p

$B = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + 1)} \cdot \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{4})}{(\sqrt{4} + \sqrt{3})} \cdot \dots \cdot \frac{(\sqrt{2019} + \sqrt{2018})}{(\sqrt{2018} + \sqrt{2017})}$

$\frac{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} > 1, (\forall) k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow B > 1$ . Cum  $A \cdot B = 1 \Rightarrow A \neq B \Rightarrow A + B > 2$  ..... 1p

b)  $A \cdot B = 1 \Rightarrow \frac{B}{A} = B^2 = \left(\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + 1)} \cdot \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{4})}{(\sqrt{4} + \sqrt{3})} \cdot \dots \cdot \frac{(\sqrt{2019} + \sqrt{2018})}{(\sqrt{2018} + \sqrt{2017})}\right)^2$  ..... 1p

$\frac{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k}}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}} < \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}, (\forall) k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow B^2 < (\sqrt{1010})^2 \Rightarrow \left[\frac{B}{1010 \cdot A}\right] = 0$  ..... 1p

### SUBIECTUL 3.

Fie prisma triunghiulară regulată dreaptă *COMPET* cu triunghiul *COM* echilateral, iar înălțimea prisme  $CP = CO\sqrt{3}$ . Știind că punctul *A* este simetricul lui *M* față de punctul *C*,  $AT \cap CP = \{B\}$ , iar punctul *D* este centrul feței *OMTE*, aflați:

- măsura unghiului dintre dreptele *BD* și *PT*;
- măsura unghiului dintre planele (*TOB*) și (*MOC*).

### SOLUȚIE

a) $\Delta MAO$ : $m(\sphericalangle O) = 90^\circ$ , $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$ .....	1p
BC linie mijlocie în $\Delta AMT \Rightarrow CB=BP$ .....	1p
BD linie mijlocie în $\Delta TAO \Rightarrow BD \parallel AO$ .....	1p
$BD \parallel AO, PT \parallel AM \Rightarrow m(\sphericalangle(BD; PT)) = m(\sphericalangle MAO) = 30^\circ$ .....	1p
b) $TO \perp OA$ .....	1p
$m(\sphericalangle[(TOB); (MOC)]) = m(\sphericalangle TOM)$ .....	1p
$\Delta OMT$ : $m(\sphericalangle O) = 90^\circ$ , $TM = OM\sqrt{3} \Rightarrow m(\sphericalangle TOM) = 60^\circ = m(\sphericalangle[(TOB); (MOC)])$ .....	1p

### SUBIECTUL 4.

Se consideră  $\Delta ABC$  cu  $[AB] \equiv [AC]$  și  $m(\sphericalangle BAC) \leq 90^\circ$ . Fie un punct *T* în exteriorul planului (*ABC*) astfel încât planele (*ABC*) și (*BTC*) să fie perpendiculare, iar proiecția punctului *T* pe *BC* să aparțină segmentului (*BC*).

Construim  $TM \perp AB$ ,  $M \in AB$  și  $TN \perp AC$ ,  $N \in AC$ . Arătați că  $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$  dacă și numai dacă  $AM + AN = BM + CN$ .

(G.M.B. nr.5/2015 – enunț modificat)

### SOLUȚIE

Fie  $TP \perp (BC)$ ,  $P \in (BC)$ .

Se demonstrează că  $TP \perp (ABC)$  .....

RT3  $\Rightarrow PM \perp AB, PN \perp AC$  .....

„ $\Rightarrow$ ”

$m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ , se demonstrează  $AMPN$  dreptunghi  $\Rightarrow AM+AN=PM+PN$  .....

$\Delta MBP, \Delta PNC$  = dreptunghice isoscele  $\Rightarrow PM=BM, PN=CN \Rightarrow AM+AN=BM+CN$  .....

„ $\Leftarrow$ ”

$AM+AN=BM+CN \Rightarrow AM+AN+BM+CN=2AB \Rightarrow AM+AN=BM+CN=AB$  .....

$\Delta BMP \Rightarrow MB = PB \cos B, \Delta PNC \Rightarrow NC = CP \cos C$

Dar  $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C \Rightarrow MB+NC=(PB+CP)\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{AB}{BC}$  .....

Fie  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC \Rightarrow \cos B = \frac{BD}{AB} \Rightarrow 2\cos B = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{2AB}{BC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC^2 = 2AB^2 \Rightarrow m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$  .....

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .