



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2018

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

Subiectul 1

a) Dacă x și y sunt numere raționale cu proprietatea că $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$, demonstrați că $x = y = 0$.

b) Determinați toate perechile de numere raționale (a, b) care verifică egalitatea $\sqrt{2(a+1)^2 - 2\sqrt{2}} = |b+1|\sqrt{3} - |\sqrt{2} - \sqrt{3}|$.

SOLUȚIE

a) Presupunem că $y \neq 0$. Atunci relația din enunț este echivalentă cu $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, fals 1p

Rezultă că $y = 0$, deci și $x = 0$ 1p

b) Relația din enunț devine $|a+1|\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = |b+1|\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 1p

Echivalent cu $(|a+1| - 3)\sqrt{2} = (|b+1| - 1)\sqrt{3}$ 1p

Conform a), rezultă $|a+1| - 3 = 0$ și $|b+1| - 1 = 0$ 2p

Obținem perechile $(2; 0)$, $(-4; 0)$, $(2; -2)$, $(-4; -2)$ 1p

Subiectul 2 Fie suma $S_n = \frac{7}{6} + \frac{13}{12} + \frac{21}{20} + \dots + \frac{n^2 + 5n + 7}{n^2 + 5n + 6}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că $(n+2)(n+3) = n^2 + 5n + 6$.

b) Arătați că $S_n = \frac{(n+1)(2n+7)}{2(n+3)}$.

c) Cercetați dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $S_n \in \mathbb{N}$.

SOLUȚIE

a) $n^2 + 2n + 3n + 6 = n^2 + 5n + 6$ 1p

b) $S_n = \frac{7}{6} + \frac{13}{12} + \frac{21}{20} + \dots + \frac{n^2 + 5n + 7}{n^2 + 5n + 6} = 1 + \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{12} + 1 + \frac{1}{20} + \dots + 1 + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \dots$ 1p

$= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ 1p

$S_n = (n+1) \cdot 1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}) = n+1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}) = n+1 + \frac{n+1}{2(n+3)} = \frac{(n+1)(2n+7)}{2(n+3)} \Rightarrow$

$S_n = \frac{(n+1)(2n+7)}{2(n+3)}$ 1p

c) $\begin{cases} S_n \in \mathbb{N} \\ n+1 \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \left\{ \frac{n+1}{2(n+3)} \in \mathbb{N} \right.$ 1p

$\Rightarrow \begin{cases} 2n+6/n+1 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+6/2n+6 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+6/2n+2 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+6/2n+6-2n-2 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+6/4 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \dots$ 1p

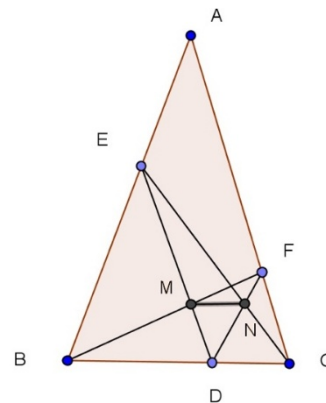
$2n+6 \in D_4 = \{1, 2, 4\} \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$ 1p

Subiectul 3 Se consideră triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ și punctul $D \in (BC)$. Paralelele construite prin D la dreptele AB și AC intersectează (AC) și (AB) în punctele F, respectiv E. Dacă $EC \cap FD = \{N\}$ și $FB \cap ED = \{M\}$, demonstrați:

a) $MN \parallel BC$

b) $\frac{1}{MN} = \frac{1}{BD} + \frac{1}{CD}$.

(G.M. nr. 3/2017)



SOLUTIE

a) $\left. \begin{array}{l} DE \parallel AC \\ BC \text{ secantă} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle EDB \equiv \angle ACB \text{ (corespondente)} \Rightarrow \angle EDB \equiv \angle ABC \Rightarrow \triangle EBD \text{ isoscel} \Rightarrow EB = ED = x$
 $\left. \begin{array}{l} FD \parallel AB \\ BC \text{ secantă} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle FDC \equiv \angle ABC \text{ (corespondente)} \Rightarrow \angle FDC \equiv \angle FCD \Rightarrow \triangle FDC \text{ isoscel} \Rightarrow FD = FC = y$ 1p

$BE \parallel DF \xRightarrow{T.F.A.} \triangle EBM \sim \triangle DFM \Rightarrow \frac{EB}{DF} = \frac{BM}{FM} = \frac{EM}{DM} \Rightarrow \frac{BM}{FM} = \frac{x}{y} \quad (1)$

$FC \parallel DE \xRightarrow{T.F.A.} \triangle EDN \sim \triangle CFN \Rightarrow \frac{ED}{CF} = \frac{DN}{FN} = \frac{EN}{CN} \Rightarrow \frac{DN}{FN} = \frac{x}{y} \quad (2)$ 1p

Din (1) și (2) rezultă $\frac{BM}{FM} = \frac{DN}{FN} \xRightarrow{R.T.Th.} MN \parallel BC$ 1p

b) În $\left. \begin{array}{l} \triangle FBD \\ MN \parallel BD \end{array} \right\} \xRightarrow{T.F.A.} \triangle FMN \sim \triangle FBD \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{MN}{BD} = \frac{FM}{FB} = \frac{FN}{FD} \\ \frac{FM}{BM} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{FM}{FB} = \frac{y}{x+y} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{y}{x+y}$

$\Rightarrow \frac{1}{BD} = \frac{y}{MN(x+y)} \quad (3)$ 2p

În $\left. \begin{array}{l} \triangle EDC \\ MN \parallel CD \end{array} \right\} \xRightarrow{T.F.A.} \triangle EMN \sim \triangle EDC \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{EM}{ED} = \frac{MN}{DC} = \frac{EN}{EC} \\ \frac{EM}{DM} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{EM}{DE} = \frac{x}{x+y} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{MN}{DC} = \frac{x}{x+y}$

$\Rightarrow \frac{1}{CD} = \frac{x}{MN(x+y)} \quad (4)$ 1p

Adunând relațiile (3) și (4) rezultă $\frac{1}{BD} + \frac{1}{DC} = \frac{y}{MN(x+y)} + \frac{x}{MN(x+y)}$ rezultă $\frac{1}{BD} + \frac{1}{DC} = \frac{1}{MN}$.. 1p

Subiectul 4 În pătratul ABCD de latură 5 cm, se consideră punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$ astfel încât $m(\angle EAF) = 45^\circ$. Dacă aria triunghiului CEF este de 3 cm^2 , calculați aria triunghiului AEF.

SOLUTIE

Se prelungește [CB] cu segmentul [BT] $\equiv [DF]$, $B \in (TE)$ 1p

$\triangle ADF \equiv \triangle ABT \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [AF] \equiv [AT] \\ \angle TAB \equiv \angle DAF \end{array} \right. \Rightarrow m(\angle TAE) = m(\angle TAB) + m(\angle BAE) = 45^\circ$ 1p

$\triangle TAE \equiv \triangle FAE \Rightarrow A_{TAE} = A_{FAE}$ și $A_{TAE} = A_{ABT} + A_{ABE} = A_{ADF} + A_{ABE} \Rightarrow A_{FAE} = A_{ADF} + A_{ABE}$ 2p

$A_{ABEFD} = 2A_{AEF}$ 1p

$A_{AEF} = (A_{ABCD} - A_{CFE}) : 2 = (25 - 3) : 2 = 11 \text{ cm}^2$ 2p

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .